



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

232

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

6

167967
13/12/21

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1885.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.



REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND,	Lund.
H. TH. DAUG,	Upsala.
H. GYLDÉN,	Stockholm.
HJ. HOLMGREN,	»
SOPHIE KOWALEVSKI,	»
C. J. MALMSTEN,	Upsala.
G. MITTAG-LEFFLER,	Stockholm.

NORGE:

C. A. BJERKNES,	Christiania.
O. J. BROCH,	»
S. LIE,	»
L. SYLOW,	Fredrikshald.

DANMARK:

L. LORENZ,	Kjöbenhavn.
J. PETERSEN,	»
H. G. ZEUTHEN,	»

FINLAND:

I. LINDELÖF,	Helsingfors.
--------------	--------------

ACTA MATHEMATICA, 6. 1885.

INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

	Seite, Page
DU BOIS-REYMOND, P., Über den Begriff der Länge einer Curve	167—168
KOWALEWSKI, SOPHIE, Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln	249—304
MOLK, J., Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination	1—166
RUNGE, C., Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen	229—244
RUNGE, C., Zur Theorie der analytischen Functionen	245—248
RUNGE, C., Entwicklung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten	305—318
STERN, M. A., Eine Bemerkung über Divisorensummen	327—328
STIELTJES, T. J., Un théorème d'algèbre	319—320
STIELTJES, T. J., Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé	321—326
WEBER, H., Zur Theorie der elliptischen Functionen	329—416
WEIERSTRASS, K., Sur la théorie des fonctions elliptiques. Traduit de l'allemand par A. PAUTONNIER	169—228

A Monsieur le Directeur de «*Centralttryckeriet*»,
à Stockholm.

Monsieur le Directeur,

J'ai vu de trop près les difficultés que rencontre l'exécution typographique des *Acta Mathematica*, pour ne pas apprécier hautement les sacrifices considérables que votre maison s'est imposés pour faire paraître cette publication sous une forme digne du monde savant auquel elle s'adresse.

Si les *Acta Mathematica* occupent aujourd'hui une place si honorable parmi les meilleures publications scientifiques de l'étranger, je me plais à reconnaître ici que le mérite en revient pour une bonne part à vous, Monsieur le Directeur, et à la puissante maison que vous dirigez avec tant d'intelligence.

Veuillez agréer, Monsieur le Directeur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

G. Mittag-Leffler.

Stockholm, le 11 Février 1885.

SUR UNE
NOTION QUI COMPREND CELLE DE LA DIVISIBILITÉ
ET SUR LA
THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉLIMINATION

PAR

J. MOLK
A STRASBOURG.

Introduction.

Les voies nouvelles ouvertes à l'Algèbre par les travaux de GAUSS, d'ABEL et de GALOIS ont été le point de départ des recherches de M. KRONECKER sur la théorie générale de l'élimination. Ces recherches sont intimement liées à celles qui ont pour objet l'étude des systèmes de diviseurs d'un système de fonctions entières. Je me suis proposé, dans ce mémoire, d'exposer les unes et les autres, en me plaçant au point de vue arithmétique de M. KRONECKER.

Pour bien faire saisir l'esprit des méthodes employées il m'a semblé nécessaire de préciser tout d'abord l'idée d'irréductibilité dans un domaine de rationalité donné. J'ai ensuite développé les premiers éléments de la théorie des systèmes de diviseurs dont l'introduction en Algèbre est due à M. KRONECKER. Après avoir exposé quelques théorèmes sur l'élimination d'une variable entre deux équations, j'ai enfin abordé l'objet même de ce mémoire, la théorie générale de l'élimination.

Je désirerais surtout éclaircir quelques points du grand mémoire que M. KRONECKER a publié, en Septembre 1881, à l'occasion du cinquantième

anniversaire du doctorat de M. KUMMER.⁽¹⁾ Ce mémoire semble appelé à imprimer une direction nouvelle à l'Algèbre. Le but que je me suis proposé serait entièrement atteint si mon travail pouvait amener quelques géomètres à approfondir les idées aussi difficiles que nombreuses qui y sont contenues.

C'est à ce mémoire, à quelques autres publications de M. KRONECKER et plus particulièrement à son Cours professé à l'Université de Berlin que j'ai emprunté presque tous les matériaux de ce travail. Je me suis efforcé de les grouper et de les éclairer, de les ordonner aussi méthodiquement que le comportait la nature du sujet, et de les rendre ainsi accessibles à tous. A cet effet, je n'ai pas hésité à répéter, à plusieurs reprises, des choses bien connues de tous ceux qui s'occupent d'Algèbre. D'autre part, j'ai cherché à caractériser et à bien mettre en évidence les questions qui, pour moi du moins, restent à résoudre. M. KRONECKER a bien voulu s'intéresser à mon travail et je lui dois les plus précieux encouragements pendant tout le temps que j'y ai consacré.

CHAPITRE I.

Méthodes particulières à l'Algèbre.

1. L'Arithmétique et l'Algèbre prennent une place à part dans l'ensemble des sciences mathématiques. Leur objet propre est, en dernière analyse, l'étude des propriétés des nombres entiers positifs et des fonctions entières à coefficients entiers, positifs, d'une ou de plusieurs variables indépendantes.

Ces deux études ne diffèrent pas essentiellement l'une de l'autre. Une fonction entière, à coefficients entiers, positifs, d'un certain nombre de variables représente, en effet, d'une manière commode, un système de nombres entiers et ne représente pas autre chose. On obtient ce système

(¹) L. KRONECKER: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*. Festschrift zu Herrn E. E. KUMMERS Doctor-Jubiläum. Berlin, Reimer 1882.

en remplaçant successivement, dans la fonction entière considérée, les variables par tous les systèmes de valeurs entières plus petites qu'un entier, laissé, à dessein, *indéterminé* dans les recherches générales, afin de pouvoir être choisi convenablement dans chaque recherche particulière. L'indétermination du nombre *fini* d'entiers du système que l'on considère, et la manière d'obtenir facilement ces entiers, sont toutes deux mises en évidence en représentant ce système par une fonction entière.

L'Arithmétique et l'Algèbre ont ainsi un domaine bien défini; les nombres entiers, positifs, les systèmes de nombres entiers représentés par des fonctions entières à coefficients entiers, positifs, y sont considérés comme *existant*, tout comme le mouvement en cinématique et la matière dans les sciences naturelles. Les nombres rationnels, négatifs, imaginaires, ainsi que les nombres irrationnels et transcendants ne font pas partie de ce domaine. Ils n'ont du nombre que le nom; en réalité ce sont de purs symboles.

En Analyse le point de vue est différent. On commence par généraliser l'idée même de quantité. GAUSS l'a le premier fait d'une manière systématique mais sans séparer entièrement le domaine de la Géométrie de celui de l'Arithmétique. Plus tard M. WEIERSTRASS a suivi une méthode essentiellement différente où l'on ne s'attache d'abord à aucun domaine déterminé mais où, au contraire, le but que l'on se propose, en généralisant l'idée de quantité, est de *déterminer* le domaine nécessaire et suffisant dans lequel on puisse effectuer toutes les opérations directes et inverses qui se présentent dans les calculs. Mais que l'on se place au point de vue de GAUSS ou à celui de M. WEIERSTRASS il importe de remarquer que le désir de pouvoir répondre *positivement* à une série de questions, qui sont en partie du domaine de la Géométrie, a seul amené les mathématiciens à introduire successivement de nouveaux symboles en Analyse. On comprend alors qu'en se plaçant au point de vue spécial de l'Arithmétique, en assignant à cette science un domaine déterminé, celui des nombres entiers, positifs, et en ne voulant pas introduire dans tous les raisonnements une idée étrangère à l'objet que l'on a en vue, il convienne de n'employer qu'une partie des symboles de l'Analyse, celle qui ne nous fait quitter qu'en apparence le domaine de l'Arithmétique.

Les symboles dits rationnels, positifs et négatifs remplissent cette condition. A tout moment une égalité contenant des nombres rationnels,

positifs ou négatifs, peut être transformée en une égalité entièrement équivalente et ne contenant que des nombres entiers et positifs. Un nombre *fini* d'opérations permet toujours de grouper les symboles rationnels suivant les besoins du calcul et de remplacer ces groupes par des nombres entiers positifs à l'aide des égalités qui définissent ces symboles, égalités qui peuvent toujours être sous-entendues et qui seules ont une existence réelle en Arithmétique.

La même chose a lieu pour les fonctions entières ou rationnelles, à coefficients entiers ou rationnels, positifs ou négatifs, d'un nombre quelconque de variables. Aussi les adjoindrons-nous également au domaine de l'Arithmétique.

Les fonctions entières d'une variable, égalées à zéro, définissent de nouveaux nombres, les nombres algébriques. Mais nous remarquons une grande différence entre l'introduction de ces nombres et celle des nombres rationnels, car nous ne pouvons pas à tout moment remplacer une égalité contenant des nombres algébriques par une égalité équivalente et ne contenant que des nombres entiers et positifs. En réalité, lorsqu'on définit positivement les nombres algébriques, on quitte vraiment, et non plus en apparence seulement pour la commodité des calculs, le domaine de l'Arithmétique pour entrer dans un domaine plus vaste. Il convient donc d'éviter l'emploi de ces nombres. Leur introduction, en Arithmétique, est d'ailleurs inutile en théorie; nous verrons plus loin par quoi il faut chercher à les remplacer.

Pendant lorsqu'on fait de nouvelles recherches, il est presque indispensable, dans l'état actuel de la science, de se servir de nombres algébriques; c'est, il est vrai, un simple artifice de langage, mais il fait image et nous permet de séparer facilement dans notre pensée les différentes racines conjuguées et d'abrégier ainsi les démonstrations. La même chose a lieu en Géométrie par exemple, où il est souvent bien commode de ne pas s'astreindre tout d'abord à faire de la Géométrie de position, mais, au contraire, de supposer connus certains éléments qui sont du domaine de la Mécanique.

Sans doute il est nécessaire, pour être en droit de séparer ainsi les racines et de les représenter *séparément* par des symboles, de montrer comment, après avoir ramené le cas général à celui de la recherche des racines réelles d'une équation à coefficients réels, on peut, dans ce cas

particulier, *déterminer un intervalle dans lequel l'équation donnée ne saurait être vérifiée par plus d'un nombre rationnel, avec une approximation donnée, suffisamment grande.* Il faut, en un mot, montrer ce que l'on doit entendre par racine d'une équation algébrique, au point de vue arithmétique auquel nous nous sommes placés.

Mais ces considérations m'écarteraient par trop de l'objet que j'ai principalement en vue. Elles rentrent dans un autre ordre d'idées et il convient de les exposer avec la théorie des *Caractéristiques*.⁽¹⁾ En supposant cette lacune comblée, il n'y a aucun inconvénient, dans des recherches nouvelles, à se servir de ces symboles algébriques, si l'on a soin d'y joindre l'égalité qui les définit. Il est cependant toujours *nécessaire*, lorsqu'on se propose d'approfondir les principes de l'Algèbre, de se passer, autant que possible, de cet instrument étranger au domaine de cette science.

Ce que je dis des nombres algébriques s'applique mot pour mot aux fonctions algébriques.

2. Mais la faiblesse de notre esprit ne nous permet pas plus d'aborder directement les questions fondamentales de l'Algèbre que celles de l'Arithmétique. Il nous est nécessaire de saisir à la fois tout l'ensemble d'une question, toutes les faces sous lesquelles elle se présente, pour pouvoir tirer des conclusions; et notre puissance d'abstraction est, en général, si faible que nous avons besoin d'auxiliaires. Ces auxiliaires nous sont donnés par la nature elle-même. Ce sont les quantités indéterminées. C'est à GAUSS que revient la gloire de les avoir introduites en Arithmétique. POISSON et plusieurs autres mathématiciens éminents, ont certainement aperçu, en partie du moins, leur importance; mais c'est à M. KRONECKER qu'il était réservé de faire voir clairement le rôle fondamental qu'elles sont appelées à jouer en Algèbre.

Je distingue entre *indéterminées* et *variables*.

Nous ne pouvons pas disposer des indéterminées dans le cours d'une démonstration. Ce sont ou bien de simples liens destinés à joindre une série d'opérations à effectuer ou de valeurs à trouver, et alors nous n'avons aucune prise sur elles, ou bien encore des abstractions que nous laissons à dessein indéterminées dans une même recherche afin d'embrasser un grand nombre de cas particuliers dans un seul calcul et alors, le calcul

(1) Comparez KRONECKER, Monatsberichte der Berliner Akademie 1869.

terminé, nous pouvons leur donner une valeur quelconque. Dans ce dernier cas, je les nommerai plus particulièrement variables-indéterminées.

Les variables, au contraire, peuvent prendre des valeurs particulières dans le cours d'une démonstration. Elles nous sont, en effet, données par la nature même de nos recherches et nous nous proposons précisément de rechercher les valeurs particulières qu'il faut leur donner, ou encore les restrictions auxquelles elles doivent être soumises pour satisfaire aux conditions d'un problème déterminé.

Nous verrons, dans la suite, que l'emploi de variables *auxiliaires* est parfois fort utile. Il permet d'effectuer des transformations qui affranchissent les expressions considérées de certains cas particuliers dont l'étude spéciale ne serait d'aucun profit pour les résultats à obtenir.

On pourrait objecter à ce que j'ai dit des nombres et fonctions algébriques que ce sont tout aussi bien des *auxiliaires* légitimes que les quantités indéterminées. Cela n'est point douteux quant à la rigueur des démonstrations. Dans l'état actuel de la science, il peut même être souvent plus avantageux, pour obtenir ou énoncer rapidement des résultats nouveaux, d'employer comme *auxiliaires* les fonctions algébriques que de faire usage des quantités indéterminées. Mais lorsqu'il s'agit de voir clairement le rôle que joue chaque élément dans l'exposé des principes et des méthodes de l'Algèbre, il ne saurait y avoir de doute sur l'avantage de l'emploi des quantités indéterminées sur celui des nombres et fonctions algébriques.

En effet, l'existence même approximative de ces derniers est une idée très-complexe dans le domaine que nous nous sommes fixés. On peut presque dire qu'elle joue le même rôle en Algèbre que l'intégrale de CAUCHY en Analyse. C'est parce qu'ils supposent et renferment plusieurs hypothèses essentielles que ces deux merveilleux instruments permettent d'obtenir rapidement un grand nombre de transformations, l'un d'expressions algébriques, l'autre d'expressions transcendentes. Avant d'avoir cherché à s'en passer, on ne se rend que très-difficilement compte de toute la simplification qu'ils introduisent l'un en Algèbre, l'autre en Analyse. Loin de les critiquer je crois, au contraire, qu'il convient, actuellement, de les placer, dans ces deux sciences, au début de toute recherche nouvelle. Mais je crois aussi que, précisément parce qu'ils renferment tous deux tant d'hypothèses essentielles, ils n'éclairent pas suffisamment les principes de la science, et c'est pourquoi, en me bornant à

l'Algèbre, je disais plus haut que lorsqu'on se propose d'en approfondir les principes, il est préférable de chercher à se passer de leur aide.

Les indéterminées, au contraire, ne nous font point quitter le domaine des quantités rationnelles. Elle n'exigent point d'autres symboles que ceux que nous connaissons déjà, les symboles qui correspondent aux quatre opérations. Elles ont de plus un grand avantage, celui d'unir en quelque sorte l'Arithmétique à l'Algèbre, la théorie des nombres à celle des fonctions entières d'une et de plusieurs variables, comme nous le verrons dans la suite.

Je rappelle qu'une *forme* est une fonction entière dans laquelle les variables sont remplacées par des indéterminées.

L'*association* ⁽¹⁾ des quantités indéterminées au domaine de l'Algèbre amène naturellement à joindre à l'étude des nombres entiers et des fonctions entières, celle des *formes* dont les coefficients sont soit des nombres entiers, soit des fonctions entières.

Il me reste à parler des nombres transcendants et imaginaires.

Les nombres transcendants, comme le rapport d'une circonférence à son diamètre, ne joueront pour nous que le rôle d'indéterminées. Si, en effet, nous démontrons un théorème en les supposant indéterminées et que nous remplacions ensuite ces indéterminées par les nombres transcendants donnés, rien ne saurait être changé dans notre domaine algébrique.

Les nombres imaginaires, de même que les nombres algébriques ne joueront aussi pour nous que le rôle d'indéterminées; mais, comme ils sont définis par des égalités ayant une existence réelle dans le domaine que nous considérons, il nous faudra tenir compte, dans nos calculs, de ces égalités, ce qui revient à remplacer les équations par des congruences.

Ainsi, par exemple, $\sqrt{2}$ n'est qu'un symbole; ce qu'il y a de réel, pour nous, c'est l'égalité $x^2 = 2$ qui définit $\sqrt{2}$. Si nous joignons au symbole l'égalité correspondante rien n'empêche d'en faire usage; chaque fois que dans le courant d'un calcul paraîtra $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, l'égalité adjointe nous montre que nous devons remplacer ce produit par le nombre 2; en d'autres termes, que toute équation

$$F(\sqrt{2}) = 0$$

(1) Comparez KRONECKER: Festschrift, § 22.

où F désigne une fonction entière à coefficients rationnels, est équivalente à la congruence

$$F(u) \equiv 0 \pmod{x^2 - 2}$$

dans laquelle u désigne une indéterminée.

La même chose a lieu pour les nombres imaginaires que l'on emploie ordinairement en Analyse, le module de la congruence étant alors $(x^2 + 1)$. Dans des recherches spéciales d'Arithmétique il peut être convenable d'employer d'autres imaginaires que $\sqrt{-1}$; cela revient à remplacer le module $(x^2 + 1)$ par un autre module qui simplifie, d'avantage la recherche particulière que l'on effectue.

3. Ce que j'ai dit du domaine particulier à l'Arithmétique et à l'Algèbre indique la marche à suivre dans tout exposé des résultats principaux obtenus dans ces deux sciences.

Les définitions devront être algébriques et non pas logiques-seulement.

Il ne suffit pas de dire: »Une chose est ou elle n'est pas». Il faut montrer ce que veut dire être et ne pas être, dans le domaine particulier dans lequel nous nous mouvons. Alors seulement nous faisons un pas en avant. Si nous définissons, par exemple, une fonction irréductible comme une fonction qui n'est pas réductible, c'est à dire qui n'est pas décomposable en d'autres fonctions d'une nature déterminée, nous ne donnons point de définition algébrique, nous n'énonçons qu'une simple vérité logique. Pour qu'en *Algèbre*, nous soyons en droit de donner cette définition, il faut qu'elle soit précédée de l'exposé d'une méthode nous permettant d'obtenir à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, les facteurs d'une fonction réductible. Seule cette méthode donne aux mots *réductible* et *irréductible* un sens algébrique.

Un raisonnement comme celui-ci: »Si des quantités données, en nombre infini, sont comprises entre des limites finies, il existe nécessairement une limite inférieure de ces quantités», est parfaitement logique. Il n'est point algébrique. Ce qu'il faut c'est donner une méthode pour déterminer, à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles, cette limite inférieure. Alors seulement nous faisons de l'Algèbre.

Il convient enfin d'éviter particulièrement toute incursion dans le domaine de la Géométrie. L'idée de continuité géométrique doit nous être d'autant plus étrangère que nous grouperons les nombres, non d'après

leur grandeur, mais d'après leurs propriétés algébriques. Pour éviter tout malentendu, je m'efforcerai d'introduire une terminologie aussi peu géométrique que possible, comme l'a d'ailleurs fait M. KRONCKER dans sa *Festschrift*, en suivant ainsi l'exemple de GAUSS qui empruntait généralement sa nomenclature aux sciences biologiques.

4. En résumé: Quelle que soit la science naturelle dont on se propose d'aborder l'étude, on a soin de définir les éléments dont le groupement suivant des propriétés déterminées constitue en quelque sorte cette science. Les uns ont une existence réelle, ce sont eux que l'on a tout particulièrement en vue. Les autres sont des éléments auxiliaires; leur réduction à un nombre aussi petit que possible constitue un grand progrès; car elle permet d'apercevoir sans intermédiaires et, par suite, plus clairement les liens cachés qui semblent unir les différents phénomènes.

Autre chose est d'élargir les horizons d'une science ou d'en approfondir les principes. Dans les premiers cas toutes les méthodes peuvent être utiles et ce serait méconnaître l'unité de notre esprit que de le contester. Dans le second cas, au contraire, il faut chercher à se maintenir rigoureusement dans le domaine particulier à la science que l'on a en vue. Car ce n'est pas approfondir les principes d'une science dont le domaine est bien défini que d'en développer les éléments à l'aide de principes étrangers à ce domaine.

La méthode que je viens d'indiquer n'aurait-elle d'ailleurs que l'avantage de faire voir clairement où et comment les principes étrangers à notre domaine simplifient les recherches, qu'il conviendrait encore de l'employer dans la mesure du possible.

L'Algèbre est la première des sciences naturelles. Je viens de définir son domaine, les éléments qui le composent, les éléments auxiliaires dont l'introduction n'offre aucune espèce de difficulté, et ces autres éléments auxiliaires dont malgré tous nos efforts nous ne pouvons encore nous passer entièrement dans nos recherches.

CHAPITRE II.

Diviseurs des fonctions entières.

§ 1.

Divisibilité des fonctions entières dans un domaine naturel de rationalité.⁽¹⁾

1. Une propriété fondamentale des nombres entiers est leur *divisibilité*.

Comme un nombre contenu dans un nombre n doit être nécessairement plus petit que n , il suffit, pour trouver les diviseurs de n , de voir si les nombres 2, 3, ..., $(n - 1)$, sont contenus dans n . Un nombre fini d'opérations nous permet donc de montrer qu'un entier positif n est ou bien un produit de nombres premiers et de *trouver* alors ces nombres premiers, ou bien que n est lui-même nombre premier, c'est à dire sans autres diviseurs que lui-même et l'unité. Dans le premier cas on dit que n est un nombre composé, et l'on montre à l'aide de l'algorithme du plus grand commun diviseur que sa décomposition en facteurs premiers est univoque.

Il en est de même des fonctions entières à coefficients entiers.

Considérons d'abord *une* fonction d'une variable. Ses coefficients peuvent avoir un diviseur commun que nous savons trouver par un nombre fini d'opérations, comme je viens de le rappeler. Nous pouvons ainsi mettre toute fonction entière à coefficients entiers sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est un nombre entier et l'autre une fonction entière dont les coefficients sont des entiers sans diviseur commun. Dans des recherches sur la divisibilité des fonctions entières il est donc permis de supposer les coefficients de chacune de ces fonctions, sans diviseur commun.

Considérons ensuite *deux* fonctions d'une variable, $F(x)$ et $G(x)$. Lorsque le quotient de $F(x)$ par $G(x)$ est une fonction entière à coefficients entiers, $H(x)$, nous dirons que $F(x)$ contient $G(x)$, est divisible par $G(x)$

(¹) Comparez KRONECKER, Journal de CRELLE T. 94 et Festschrift § 4.

et que $G(x)$ est contenue dans $F(x)$, est un diviseur de $F(x)$. Nous écrirons, soit $F(x) = H(x)G(x)$, soit $F(x) \equiv 0 \pmod{G(x)}$, suivant qu'il convient de mettre en évidence la fonction $H(x)$, ou non.

Je vais montrer comment l'on peut, ou bien trouver tous les diviseurs d'une fonction donnée $F(x)$, ou bien montrer que cette fonction $F(x)$ n'a pas de diviseur. Si le degré de $F(x)$ est $2n$ ou $(2n + 1)$ il suffit évidemment de donner une méthode permettant de trouver, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, ses diviseurs de degré au plus égal à n . Mais d'après la formule d'interpolation de LAGRANGE toute fonction entière $\phi(x)$ de degré au plus égal à n , peut être mise sous la forme

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n \phi(r_k) \frac{\tilde{N}(x)}{x - r_k} \frac{1}{\tilde{N}'(r_k)}$$

où r_0, r_1, \dots, r_n désignent $(n + 1)$ nombres arbitrairement choisis et $\tilde{N}(x)$ le produit

$$\prod_{k=0}^n (x - r_k).$$

En posant

$$g_k(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{x - r_k} \frac{1}{\tilde{N}'(r_k)}$$

et

$$\phi(r_k) = c_k$$

nous ordonnons $\phi(x)$ suivant les fonctions $g_k(x)$, de degré n . Nous avons ainsi

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(x)$$

où $g_k(r_h) = 0$ pour $h \geq k$; et $g_k(r_k) = 1$.

Pour que $\phi(x)$ soit contenue dans $F(x)$, il faut que $\phi(r_h) = c_h$ soit contenue dans $F(r_h)$, pour $h = 0, 1, 2, \dots, n$. Cherchons donc tous les diviseurs positifs et négatifs du nombre $F(r_h)$; ils seront en nombre fini; désignons-les par $c_h, c'_h, c''_h, \dots, c_h^{(m_h)}$. Répétons cette opération pour $h = 0, 1, 2, \dots, n$; nous aurons certainement un nombre fini

de combinaisons $\sum_{k=0}^n c_k g_k(x)$. Chacune de ces combinaisons *peut* être un diviseur de $F(x)$ et il ne saurait y avoir d'autre diviseur de $F(x)$. Un nombre fini de divisions de deux polynômes nous permet donc de voir si $F(x)$ contient un facteur à coefficients entiers ou s'il n'en contient pas.

Nous pouvons maintenant, les nombres entiers étant considérés comme des fonctions entières de degré zéro, partager en deux classes les fonctions entières à coefficients entiers: Celles qui en contiennent d'autres; nous les nommerons *réductibles*. Et celles qui n'en contiennent pas d'autres; nous les nommerons *irréductibles*.

Dans la pratique les calculs se simplifient; mais ici l'important était de montrer que la réductibilité et l'irréductibilité des fonctions ont un sens algébrique, et que nous avons, par suite, le droit d'introduire ces notions dans la science qui fait l'objet de nos recherches.

Si $F_1(x)$ est contenue dans $F(x)$ nous répéterons sur $F_1(x)$ les mêmes raisonnements que nous venons de faire sur $F(x)$, et comme le degré de chaque diviseur est plus petit que celui de la fonction dans laquelle il est contenu, un nombre fini d'opérations nous permettra de décomposer $F(x)$ en un produit de puissances de fonctions entières *irréductibles*.

2. *Cette décomposition est univoque.* En effet, si le produit $\Phi(x) \cdot \Psi(x)$ de deux fonctions entières à coefficients entiers, est divisible par une fonction irréductible $F(x)$, l'une des deux fonctions $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, est elle-même divisible par $F(x)$. Lorsque $F(x)$ se réduit à un nombre premier, la démonstration se déduit immédiatement du théorème qu'un produit de deux nombres ne peut être divisible par un nombre premier p que si l'un des deux nombres est divisible par p , et ce théorème est un corollaire de l'algorithme d'EUCLIDE. Lorsque le degré de $F(x)$ est plus grand que zéro, si $\Phi(x)$ n'est pas divisible par $F(x)$, comme $F(x)$ est irréductible, $\Phi(x)$ et $F(x)$ n'ont point de diviseur commun. Mais alors, à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE étendu aux fonctions d'une variable, nous pouvons toujours trouver deux fonctions entières $\varphi(x)$ et $f(x)$ vérifiant l'égalité

$$\varphi(x)\Phi(x) + f(x)F(x) = 1$$

ou

$$\varphi(x)\Phi(x)\Psi(x) + f(x)F(x)\Psi(x) = \Psi(x).$$

Comme, par hypothèse, le produit $\Phi(x) \Psi(x)$ est divisible par $F(x)$, cette égalité nous montre que $F(x)$ est contenu dans $\Psi(x)$, en ce sens, du moins, que

$$m \cdot \Psi(x) = F(x) \cdot G(x)$$

$G(x)$ étant une fonction entière à coefficients entiers, et m un nombre entier.

GAUSS a le premier démontré⁽¹⁾ que si une fonction entière à coefficients entiers est le produit de deux fonctions entières à coefficients rationnels, elle est aussi le produit de deux fonctions entières à coefficients entiers. La démonstration est élémentaire et se déduit du théorème cité, que si le produit de deux fonctions entières à coefficients entiers est divisible par un nombre premier p , l'une de ces deux fonctions est elle-même divisible par p .

Comme les coefficients de $\Psi(x)$ sont entiers, et que $F(x)$ est irréductible, nous voyons donc ici que m divise tous les coefficients de $G(x)$.

Supposons maintenant que, par le procédé indiqué plus haut, nous obtenions deux décompositions d'une même fonction entière à coefficients entiers, et, par suite, l'égalité

$$\prod_{(i)} p_i^{\lambda_i} \cdot \prod_{(k)} P_k^{\mu_k}(x) = \prod_{(r)} q_r^{\nu_r} \cdot \prod_{(\sigma)} Q_{\sigma}^{\rho_{\sigma}}(x) \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, \alpha \\ k=1, 2, \dots, \alpha \\ r=1, 2, \dots, \beta \\ \sigma=1, 2, \dots, \beta \end{array} \right)$$

dans laquelle p , q , i , s , μ , σ sont des nombres, p et q , en particulier, des nombres irréductibles, et $P(x)$, $Q(x)$ des fonctions irréductibles.

Le nombre p_1 , par exemple, est alors manifestement contenu dans le terme de droite de cette égalité; chacune des fonctions $Q(x)$ étant irréductible, il faut que p_1 soit contenu dans le produit

$$\prod_{(r)} q_r^{\nu_r} \quad (r=1, 2, \dots, \beta)$$

donc qu'il soit égal à l'un des nombres $q_1, q_2, \dots, q_{\beta}$. En divisant par ce nombre les deux termes de l'égalité, et en répétant le même raisonnement pour chacun des entiers p et pour chacun des entiers q , aussi longtemps qu'il en reste, nous voyons que l'égalité précédente se réduit à

$$\prod_{(i)} P_i^{\lambda_i}(x) = \prod_{(\sigma)} Q_{\sigma}^{\rho_{\sigma}}(x) \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, \alpha \\ \sigma=1, 2, \dots, \beta \end{array} \right)$$

(1) *Disquisitiones arithmeticae*, p. 42.

Mais alors, à cause du théorème précédent, la fonction irréductible $P_1(x)$ est égale à l'une des fonctions irréductibles $Q(x)$. Divisant, de part et d'autre, par cette fonction, et répétant le même raisonnement sur chacune des fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ autant de fois que cela est nécessaire, nous voyons que les deux décompositions de la fonction donnée en facteurs irréductibles, sont identiques.

3. Considérons maintenant une fonction de plusieurs variables indépendantes

$$F(x', x'', \dots, x^{(n)}).$$

En posant

$$x' = x^{g^0}, \quad x'' = x^{g^1}, \quad x''' = x^{g^2}, \quad \dots, \quad x^{(n)} = x^{g^{n-1}}$$

et en choisissant g assez grand pour que tous les termes du polynôme

$$F(x', x'', \dots, x^{(n)})$$

soient de degré différent en x , nous transformerons ce polynôme en une fonction d'une seule variable, $\Phi(x)$, dont tous les termes sont linéairement indépendants. Il est commode de considérer tous les exposants de x comme des nombres écrits dans le système dont la base est g . On voit alors immédiatement qu'il est impossible que $F(x', x'', \dots, x^{(n)})$ ait un facteur quelconque lorsque $\Phi(x)$ n'en a pas; car à toute égalité

$$F(x', x'', \dots, x^{(n)}) = F_1(x', x'', \dots, x^{(n)}) F_2(x', x'', \dots, x^{(n)})$$

en correspond une autre

$$\Phi(x) = \phi_1(x) \phi_2(x)$$

ϕ_1 et ϕ_2 désignant les transformées respectives de F_1 et F_2 , par les substitutions indiquées. Pour reconnaître si $F(x', x'', \dots, x^{(n)})$ a des diviseurs ou non, il suffit donc de rechercher tous les diviseurs possibles de $\Phi(x)$, ce que nous savons faire à l'aide d'un nombre fini d'opérations, puis de voir si les fonctions de plusieurs variables qui correspondent à ces diviseurs sont vraiment facteurs de $F(x', x'', \dots, x^{(n)})$ ou non, ce qui n'exige qu'un nombre fini de divisions.

Il est donc légitime d'étendre l'idée d'irréductibilité aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Nous allons en donner une seconde

démonstration, une démonstration par induction; elle nous fera voir plus complètement l'analogie qu'offre la divisibilité des fonctions d'une et de plusieurs variables indépendantes.

Supposons que nous puissions décomposer en ses facteurs irréductibles, chaque fonction entière à coefficients entiers de n variables indépendantes, x_1, x_2, \dots, x_n . Comme nous avons été amené à le faire pour les fonctions d'une variable, nous dirons que $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est contenue dans une fonction donnée $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lorsque cette dernière peut être mise sous la forme d'un produit de deux fonctions entières à coefficients entiers, dont l'une est précisément $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$; et par hypothèse nous pouvons trouver tous les facteurs de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, toutes les fonctions contenues dans une fonction quelconque de n variables.

Soit maintenant une fonction de $(n + 1)$ variables indépendantes

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Ordonnons cette fonction par rapport à x_0 , et désignons par $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le coefficient de x_0^k . Toute fonction de x_1, x_2, \dots, x_n contenue dans $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est facteur commun de toutes les fonctions $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que nous savons décomposer en leurs facteurs irréductibles. Nous pouvons donc décomposer $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ en deux facteurs dont l'un ne dépend que de n variables, et dont l'autre $G(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ordonné par rapport à x_0 a des coefficients sans diviseur commun. Mais alors nous pouvons répéter sur $G(x_0, x_1, \dots, x_n)$ considérée comme fonction de x_0 seulement, les mêmes raisonnements que nous avons faits sur $F(x)$ tout à l'heure. Seulement les coefficients ne sont plus des nombres entiers, mais des fonctions entières à coefficients entiers de x_1, x_2, \dots, x_n . Conservons les mêmes notations que dans le cas d'une variable. La formule de LAGRANGE nous fait voir qu'un nombre fini d'opérations suffit pour reconnaître si $G(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$ a des diviseurs ou non et dans le premier cas, pour trouver ces diviseurs. Pour que $\Phi(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit contenue dans $G(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$ il faut que $\Phi(r_h; x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit contenue dans $G(r_h; x_1, x_2, \dots, x_n)$. Par hypothèse, nous pouvons trouver tous les diviseurs d'une fonction de n variables seulement; nous pouvons donc, par un nombre fini d'opérations déterminer tous les systèmes c_k pour lesquels $\sum_{(k)} c_k g_k(x_0)$ peut être diviseur de $G(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$; un nombre fini de divisions nous donne enfin tous les facteurs de $G(x_0; x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Cette méthode nous permet de mettre $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ sous la forme d'un produit de fonctions irréductibles indépendantes de x_0 , et de fonctions qui, considérées comme fonctions de x_0 seulement, n'en contiennent plus d'autres. Nous allons maintenant montrer que cette décomposition ne saurait dépendre du choix de la variable suivant laquelle nous ordonnons la fonction $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Il suffit, pour cela, de démontrer que si le produit de deux fonctions $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et $\Psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est divisible par une fonction irréductible $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, l'une des deux fonctions Φ ou Ψ , est divisible par φ .

Soient

$$\begin{aligned}\Phi &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots \\ \Psi &= b_0 + b_1 x_0 + b_2 x_0^2 + \dots\end{aligned}$$

les a et b désignant des fonctions entières à coefficients entiers de x_1, x_2, \dots, x_n . Si Φ n'est pas divisible par φ , et si a_i est le premier des coefficients a ne contenant pas φ , l'expression

$$\Phi \cdot \Psi - (a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_{i-1} x_0^{i-1}) \Psi$$

et par suite

$$(a_i x_0^i + a_{i+1} x_0^{i+1} + \dots)(b_0 + b_1 x_0 + b_2 x_0^2 + \dots)$$

sera divisible par φ . Il en résulte que les coefficients de toutes les puissances de x_0 sont divisibles par φ ; ces coefficients sont

$$a_i b_0, \quad a_i b_1 + a_{i+1} b_0, \quad a_i b_2 + a_{i+1} b_1 + a_{i+2} b_0, \quad \dots$$

Supposons que si le produit de deux fonctions de n variables seulement est divisible par une fonction irréductible, également de n variables, l'une des deux premières fonctions soit nécessairement divisible par la dernière; nous voyons alors que a_i n'étant pas divisible par φ , b_0 contiendra φ ; donc aussi $a_i b_1$ et par suite b_1 ; donc aussi $a_i b_2$ et par suite b_2 ; etc. Tous les coefficients de $\Psi(x_0)$ contenant φ , il en sera de même de la fonction $\Psi(x_0)$ elle-même, et le théorème est démontré.

Ceci posé, considérons un des facteurs $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$; nous pouvons supposer que la fonction $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ne contienne pas de

facteurs indépendants de x_0 ; car si elle en contenait nous pourrions les déterminer et les joindre aux facteurs de $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ indépendants de x_0 .

Puisque $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ considérée comme fonction de x_0 , est divisible par $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$, nous avons, en désignant par k une fonction entière des $(n+1)$ variables x_0, x_1, \dots, x_n et par h une fonction entière des n variables x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$F(x_0; x_1, \dots, x_n) = f(x_0; x_1, \dots, x_n) \frac{k(x_0; x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)}.$$

Mais F est une fonction *entière* des $(n+1)$ variables x_0, x_1, \dots, x_n , donc la fonction $h(x_1, \dots, x_n)$ est contenue dans le produit $f.k$; et comme h n'est pas contenue dans f , il faut, d'après le théorème démontré, que h soit contenue dans k ; nous avons ainsi

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_n)g(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

f et g étant des fonctions entières des $(n+1)$ variables x_0, x_1, \dots, x_n .

Nous pouvons donc ou bien décomposer une fonction entière donnée $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ en d'autres fonctions entières, ou bien montrer que $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ne contient aucun facteur entier, et, par suite, classer les fonctions de plusieurs variables indépendantes, comme celles d'une seule variable, en fonctions réductibles et irréductibles; nous pouvons alors énoncer le résultat obtenu en disant que *toute* fonction entière à coefficients entiers est décomposable en ses facteurs irréductibles.

Il nous reste cependant à montrer que le théorème supposé exact pour n variables indépendantes, dans le courant de la démonstration précédente, l'est encore pour $(n+1)$ variables indépendantes.

Si le produit $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n) \cdot \psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est divisible par la fonction *irréductible* $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$, qui, étant irréductible, ne contient aucun facteur indépendant de x_0 , et si $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ne contient pas $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$, ϕ et f considérées comme fonctions de x_0 seulement, seront également sans diviseur commun, et, par suite, nous pourrions déterminer deux fonctions entières de $x_0; x_1, x_2, \dots, x_n$; ϕ_1 et f_1 , telles que l'expression $\phi_1 + \phi_1 f$ soit égale à une fonction entière de

x_1, x_2, \dots, x_n seulement que nous désignerons par $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mais alors nous avons aussi

$$\frac{\psi\phi}{f} \cdot f_1 + \psi\phi_1 = \frac{G\psi}{f}.$$

Comme le produit $\psi\phi$ est, par hypothèse, divisible par f , l'expression $\frac{G\psi}{f}$, considérée comme fonction de x_0 seulement, est une fonction entière à coefficients entiers; désignons-la par $H(x_0)$; alors

$$G \cdot \psi(x_0) = f(x_0)H(x_0).$$

Puisque la fonction $f(x_0)$ ne contient pas de facteur indépendant de x_0 , $f(x_0)$ ne peut être divisible par G ; donc $H(x_0)$ contient G ; donc $\psi(x_0)$ contient $f(x_0)$; et nous venons de montrer que si ψ considérée comme fonction de x_0 , contient f , il en est de même de ψ considérée comme fonction entière à coefficients entiers de ses $(n+1)$ variables indépendantes x_0, x_1, \dots, x_n .

Nous avons supposé que $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ était non seulement irréductible en x_0 , mais encore ne contenait aucun facteur indépendant de x_0 , tout comme dans le cas d'une seule variable indépendante nous n'avons nommée irréductible une fonction de x que lorsqu'elle ne contenait aucune autre fonction de x , et aucun nombre.

Ce théorème nous permet aussi de montrer que la décomposition d'une fonction de plusieurs variables en ses facteurs irréductibles est univoque. La démonstration est identique à celle que nous avons donnée dans le cas d'une seule variable.

En résumé, nous venons de voir que les fonctions entières d'une et de plusieurs variables indépendantes se ramènent aux fonctions *irréductibles* de ces variables.

Toute la démonstration précédente a été faite par induction. J'ai d'abord démontré les théorèmes pour une variable indépendante, puis, les supposant vérifiés pour n variables je les ai démontrés pour $(n+1)$ variables indépendantes.

4. Les développements précédents ont lieu pour des variables indépendantes quelconques. Pour plus de clarté, je désignerai maintenant par $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \dots$ les variables que j'ai plus particulièrement nommées

variables-indéterminées et je réserverai les lettres x, y, z, \dots pour les *variables* proprement dites. Pour abrégér l'énoncé des théorèmes et pour réunir en une seule expression les deux cas qui se présentent, celui où nous considérons des variables-indéterminées et celui où nous n'en considérons pas, je conviendrai que lorsqu'il n'y a qu'une variable-indéterminée \mathfrak{X} , elle *puisse être* remplacée par l'unité; dans ce cas je dirai que cette variable-indéterminée est égale à l'unité.

Demander si une fonction entière est réductible ou non, c'est demander si elle est divisible par une autre fonction entière à coefficients entiers; d'après le théorème de GAUSS dont j'ai fait usage plus haut, je puis même dire par une autre fonction entière à coefficients *rationnels*. Ayant adjoint les variables-indéterminées \mathfrak{X} aux nombres entiers qui font l'objet de nos recherches, il est à la fois naturel et nécessaire d'étendre cette définition de l'irréductibilité.

Si $\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$ sont les variables-indéterminées considérées, nous devons dire qu'une fonction entière de x_0, x_1, \dots, x_n , dont les coefficients sont fonctions entières à coefficients entiers de ces variables-indéterminées, est irréductible, lorsqu'elle ne contient aucune autre fonction des variables x_0, x_1, \dots, x_n , dont les coefficients soient fonctions entières, à coefficients entiers, des mêmes indéterminées. Pour conserver l'analogie avec le cas où $\mathfrak{X} = 1$, je dirai aussi qu'une fonction entière de x_0, x_1, \dots, x_n , dont les coefficients sont fonctions *rationnelles* des variables-indéterminées $\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$, est irréductible, lorsqu'elle ne contient aucune autre fonction entière des variables x_0, x_1, \dots, x_n , dont les coefficients soient fonctions rationnelles des mêmes variables-indéterminées. Pour fixer les idées je supposerai, une fois pour toutes, que les coefficients de ces fonctions rationnelles soient entiers.

Cette généralisation est légitime; les méthodes des numéros précédents qui permettent de reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si une fonction entière contient des diviseurs ou non, sont, en effet, immédiatement applicables. Nous savons trouver les diviseurs de tous les coefficients; car leurs numérateurs et dénominateurs sont fonctions entières à coefficients entiers des variables-indéterminées $\mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$. Nous mettrons donc d'abord la fonction donnée sous la forme d'une fonction entière à coefficients entiers des x_0, x_1, \dots, x_n et des $\mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$, divisée par une fonction entière à coefficients entiers des $\mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$, seulement;

nous chercherons ensuite les diviseurs du numérateur et ceux du dénominateur; puis, assignant, *d'une manière arbitraire*, à chaque diviseur du numérateur un nombre quelconque des facteurs du dénominateur, nous ordonnerons chacune des fractions ainsi obtenues par rapport aux variables x_0, x_1, \dots, x_n dont elles sont fonctions entières, et nous réduirons enfin à leur plus simple expression les fractions qui paraissent comme coefficients et dépendent des variables indéterminées seulement. L'arbitraire introduit dans cette réduction en facteurs irréductibles, disparaît dès que, chassant tous les dénominateurs, nous retournons dans le domaine réel des fonctions entières à coefficients entiers.

Il convient de désigner tout spécialement, par un nom, l'ensemble des fonctions rationnelles, à coefficients entiers, des variables indéterminées données, puisque l'irréductibilité en dépend. Nous dirons qu'elles forment un *domaine naturel de rationalité*, le domaine $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'', \dots, \mathfrak{N}^{(n)})$. Alors une fonction entière de x_0, x_1, \dots, x_n , sera dite *irréductible dans un domaine* $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'', \dots, \mathfrak{N}^{(n)})$ lorsqu'elle ne contient aucune autre fonction entière dont les coefficients fassent partie de ce domaine.

En réalité, c'est l'ensemble des fonctions *entières*, à coefficients entiers, des variables indéterminées $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'', \dots, \mathfrak{N}^{(n)}$, qui forme un vrai domaine, que l'on pourrait nommer *domaine d'intégrité*. Mais, comme je l'ai déjà observé dans le premier chapitre, il est commode de se servir des nombres et fonctions rationnelles, et il n'y a aucun inconvénient à s'en servir puisqu'à tout moment on peut chasser les dénominateurs sans rien changer au sens des égalités que l'on considère. C'est pourquoi il convient d'introduire l'idée de *domaine naturel de rationalité*, en même temps que celle de *domaine d'intégrité*.

Remarquons, en terminant, que la convention faite au début de ce numéro, nous permet de comprendre l'idée d'irréductibilité des fonctions entières à coefficients entiers, comme cas particulier, dans l'idée plus générale d'irréductibilité dans un domaine naturel de rationalité $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'', \dots, \mathfrak{N}^{(n)})$. Elle répond, en effet, au cas où, symboliquement, $\mathfrak{N} = 1$ et $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}''' = \dots = \mathfrak{N}^{(n)} = 0$.

En tenant compte de ces définitions, et des résultats obtenus précédemment, nous pouvons énoncer la proposition fondamentale: *Quel que soit le domaine naturel de rationalité que l'on considère, il est possible de trouver les diviseurs irréductibles d'une fonction entière quelconque, donnée.*

Nous avons ainsi obtenu *la base même* de toutes nos considérations algébriques. Il faut se garder de croire que ces recherches, bien élémentaires il est vrai, ne sont faites que dans le but de systématiser nos connaissances sur la réductibilité des fonctions entières, et qu'elles ne présentent ainsi rien de bien remarquable. Elles sont, au contraire, de la plus haute importance, car elles indiquent déjà la méthode à suivre dans le cas général d'un système de fonctions entières, et il est absolument nécessaire de les placer au début de nos recherches algébriques auxquelles, seules, elles donnent une base à la fois solide et naturelle. Dans la pratique, l'idée d'irréductibilité peut d'ailleurs simplifier considérablement la démonstration de plus d'un théorème.

§ 2.

Résultant de deux fonctions entières.

1. Un domaine naturel de rationalité est supposé connu. Nous partageons ses éléments en trois groupes. Le premier ne contient qu'un élément z , variable ou variable-indéterminée; le second contient des éléments variables $x', x'', \dots, x^{(v)}$; le troisième des éléments indéterminés $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(v)}$.

Considérons deux fonctions *entières* des éléments $z; x', x'', \dots, x^{(v)}$, dont les coefficients soient fonctions rationnelles des éléments $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(v)}$. Après avoir débarassé, s'il y a lieu, ces deux fonctions entières de leur facteur commun, ordonnons-les par rapport à z ; soient alors

$$f(z; x', x'', \dots, x^{(v)}) = f_0(x', x'', \dots, x^{(v)})z^n - f_1(x', x'', \dots, x^{(v)})z^{n-1} + \dots \\ \dots \pm f_m(x', x'', \dots, x^{(v)})$$

$$g(z; x', x'', \dots, x^{(v)}) = g_0(x', x'', \dots, x^{(v)})z^n - g_1(x', x'', \dots, x^{(v)})z^{n-1} + \dots \\ \dots \pm g_n(x', x'', \dots, x^{(v)});$$

$f_0, f_1, \dots, f_m; g_0, g_1, \dots, g_n$ désignent des fonctions entières des variables $x', x'', \dots, x^{(v)}$ dont les coefficients sont fonctions rationnelles des indéterminées $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \dots, \mathfrak{M}^{(v)}$.

Les deux fonctions $f(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ et $g(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ n'ont, par hypothèse, aucun diviseur commun tant que les éléments $x', x'', \dots, x^{(v)}$ restent indéterminés. Mais ces éléments sont *variables*; ils peuvent donc prendre des valeurs particulières ou encore être liés par des relations déterminées. Il se pourrait que ces valeurs particulières ou ces relations fussent telles que $f(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ et $g(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ aient précisément un diviseur commun en z . Dans des recherches sur la divisibilité, il importe beaucoup de déterminer celles des valeurs particulières ou des relations pour lesquelles il en est ainsi. C'est pourquoi nous allons nous proposer de rechercher les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les variables $x', x'', \dots, x^{(v)}$, pour que les deux fonctions entières $f(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ et $g(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ aient un diviseur commun en z , alors que pour des valeurs indéterminées données à $x', x'', \dots, x^{(v)}$, elles sont supposées sans diviseur commun.

Dans son célèbre Mémoire de 1815, GAUSS s'est, le premier, proposé de résoudre un problème semblable, *sans supposer démontrée l'existence des racines des équations algébriques*. Le grand géomètre a donné, dans ce mémoire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F(z)$, à coefficients variables, ait avec sa dérivée $F'(z)$ un diviseur commun, $F(z)$ étant supposée sans facteur double pour des valeurs indéterminées de ses coefficients. Nous allons donner la même démonstration dans le cas de deux fonctions entières quelconques $F(z)$ et $G(z)$, à coefficients variables.⁽¹⁾ Ce problème est plus général, et comprend celui que nous nous sommes proposés de résoudre.

Ainsi, en désignant par $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, $(m + n + 2)$ variables, et par $F(z)$ et $G(z)$ les deux fonctions entières

$$F(z) = \alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \dots + \alpha_m,$$

$$G(z) = \beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n,$$

⁽¹⁾ La première démonstration de ce théorème a été donnée par M. KRONECKER, en 1871, dans un Cours professé à l'Université de Berlin.

supposées sans diviseur commun pour des valeurs indéterminées données à $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, nous cherchons des relations, entre les variables α et β , qui soient nécessaires et suffisantes pour que $F(z)$ et $G(z)$ aient un diviseur commun.

Et cela sans supposer démontrée l'existence des racines des équations algébriques. J'ai suffisamment insisté, dans le premier chapitre de ce Mémoire, sur l'importance de cette dernière restriction. D'ailleurs, la méthode de GAUSS doit, d'après M. KRONECKER, servir de type à toutes les recherches d'Algèbre. Il convient donc de la développer avec soin.

A cet effet, nous supposerons d'abord que les variables α et β ne soient pas liées par des relations telles que $F(z)$ et $G(z)$ aient un diviseur commun, puis que les variables α et β soient liées par de telles relations, et nous transformerons successivement ces deux hypothèses en inégalités ou égalités équivalentes.

Considérons d'abord le cas particulier où $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.

2. Si $F(z)$ et $G(z)$ n'ont pas de diviseur commun, nous pouvons, à l'aide de l'algorithme du plus grand commun diviseur, déterminer deux fonctions entières de z , $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$, vérifiant identiquement l'égalité

$$\Phi(z)F(z) + \Psi(z)G(z) = 1.$$

Les coefficients des deux fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions rationnelles des variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Nous pouvons d'ailleurs toujours prendre pour $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ deux fonctions dont le degré, par rapport à z , soit respectivement $(n-1)$ et $(m-1)$; car, puisque

$$[\Phi(z) + h(z)G(z)]F(z) + [\Psi(z) - h(z)F(z)]G(z) = \Phi(z)F(z) + \Psi(z)G(z)$$

nous pouvons toujours choisir la fonction entière $h(z)$ telle que le degré du multiplicateur $\Psi(z)$ soit plus petit que m ; celui de $\Phi(z)$ est alors nécessairement plus petit que n .

Comme l'égalité

$$\Phi(z)F(z) + \Psi(z)G(z) = 1$$

et vérifiée identiquement en z , nous pouvons également écrire

$$\Phi(u_k)F(u_k) + \Psi(u_k)G(u_k) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m+n)$$

u_1, u_2, \dots, u_{m+n} désignant $(m+n)$ indéterminées.

Si donc nous formons, à l'aide de ces indéterminées, deux fonctions entières de z

$$\prod_{h=1}^m (z - u_h) = P(z) \quad \text{et} \quad \prod_{h=m+1}^{m+n} (z - u_h) = Q(z)$$

nous pouvons écrire

$$\phi(u_k)[F(u_k) - P(u_k)] + \psi(u_k)G(u_k) = 1 \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

ou encore

$$\prod_{k=1}^m \{\phi(u_k)F(u_k) - \phi(u_k)P(u_k) + \psi(u_k)G(u_k)\} = 1.$$

Les coefficients de la plus haute puissance de z dans les deux fonctions $F(z)$ et $P(z)$, toutes deux de degré m , sont égaux à l'unité; nous avons donc, en désignant par $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$, les fonctions symétriques élémentaires des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_m , d'une part, et $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{m+n}$, d'autre part,

$$\prod_{k=1}^m \left\{ \phi(u_k) \sum_{h=1}^m (-1)^h (\alpha_h - \mathfrak{f}_h) u_k^{m-h} + \psi(u_k) G(u_k) \right\} = 1.$$

Ce produit est une fonction symétrique entière des indéterminées u_1, \dots, u_m , et par suite une fonction entière des éléments $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$. En effectuant la multiplication indiquée, nous obtenons d'ailleurs une fonction dont chaque terme contient au moins un des facteurs $(\alpha_h - \mathfrak{f}_h)$ et que nous pouvons, par suite, considérer comme linéaire et homogène des différences $(\alpha_h - \mathfrak{f}_h)$, à un facteur près

$$\prod_{k=1}^m \psi(u_k) G(u_k).$$

Le produit $\prod_{k=1}^m G(u_k)$ est, d'après le théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques, une fonction entière des éléments $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$; et le produit $\prod_{k=1}^m \psi(u_k)$ est, d'après le même théorème, une fonction entière des éléments $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$. Si donc nous posons

$$\prod_{k=1}^m G(u_k) = R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$\prod_{k=1}^m \Psi(u_k) = S(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m)$$

et que nous désignons par K une fonction entière des éléments $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_m$ nous voyons que l'égalité précédente peut être mise sous la forme

$$\sum_{h=1}^m (\alpha_h - \mathfrak{f}_h) K_h(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m)$$

$$+ R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) S(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m) = 1.$$

Nous avons obtenu cette égalité par une simple transformation de l'identité

$$\Phi(z)F(z) + \Psi(z)G(z) = 1.$$

Elle est donc, elle-même, vérifiée identiquement en u_1, u_2, \dots, u_m . Mais les fonctions symétriques élémentaires de m variables indépendantes forment un système de m variables également indépendantes. Il en résulte que l'égalité que nous venons d'établir est vérifiée identiquement en $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_m$; elle a donc lieu lorsque nous substituons aux indéterminées $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$, les valeurs particulières $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Ainsi se trouve démontrée, pour des systèmes quelconques $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, vérifiant notre première hypothèse, l'égalité

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 1.$$

Si nous observons que $S(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m)$ était une fonction *entière* des indéterminées $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$, à coefficients rationnels *déterminés* de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, nous voyons que la valeur de cette fonction est finie lorsqu'on y substitue à $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$, les variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Nous en concluons que la fonction $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ne saurait être nulle.

Donc, si les variables α et β sont liées par des relations telles, que la fonction $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ soit égale à zéro, les deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ auront nécessairement un diviseur commun en z .

Car si elles n'en avaient pas, nous venons de voir que R serait différent de zéro.

Dans tout ce qui précède nous n'avons considéré que les m indéterminées u_1, u_2, \dots, u_m qui définissent la fonction $P(z)$; rien ne nous empêche de répéter les mêmes raisonnements en prenant comme point de départ les m indéterminées $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{m+n}$ qui définissent la fonction $Q(z)$. Nous obtenons alors une fonction entière R_1 définie par l'égalité

$$R_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \prod_{k=m+1}^{m+n} F(u_k)$$

et nous arrivons, comme tout à l'heure, au résultat que si les variables α et β sont liées par des relations telles, que la fonction $R_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ soit égale à zéro, les deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ ont nécessairement un diviseur commun en z .

Posons, pour un instant, $u_{m+i} = v_i$; nous aurons alors

$$\prod_{k=1}^m Q(u_k) = \prod_{k=1}^m \prod_{h=1}^n (u_k - v_h) = (-1)^{mn} \prod_{h=1}^n \prod_{k=1}^m (v_h - u_k)$$

$$\prod_{k=m+1}^{m+n} P(u_k) = \prod_{h=1}^n P(v_h) = \prod_{h=1}^n \prod_{k=1}^m (v_h - u_k)$$

donc

$$\prod_{k=1}^m Q(u_k) = (-1)^{mn} \prod_{k=m+1}^{m+n} P(u_k).$$

Ainsi les deux fonctions R et R_1 sont égales, au signe près, pour des fonctions F et G à coefficients indéterminés. Il est, en effet, manifeste que pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ indéterminés, les fonctions P et F et, de même, les fonctions Q et G , sont identiques.

Les deux termes de l'égalité

$$\prod_{k=1}^m Q(u_k) = \pm \prod_{k=m+1}^{m+n} P(u_k)$$

sont fonctions symétriques des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_m d'une part et des indéterminées u_{m+1}, \dots, u_{m+n} de l'autre; cette égalité a d'ailleurs lieu *identiquement* en $u_1, u_2, \dots, u_m; u_{m+1}, \dots, u_{m+n}$; donc aussi en

$\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$; elle a donc également lieu si l'on y substitue à $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ les variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ liées par les relations considérées, ce qui démontre l'égalité, au signe près, des deux fonctions $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ et $R_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Cette remarque nous permet de donner une méthode pour trouver, dans chaque cas particulier, la fonction $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. En effet, si

$$H(z) = \prod_{k=1}^{m+n} (z - u_k)$$

l'expression

$$\sum_{k=1}^{m+n} \frac{H(z)}{(z - u_k) H'(u_k)}$$

est une fonction de z , qui, pour $z = u_k$, se réduit à l'unité. Elle représente donc la fonction de degré $(m + n - 1)$

$$\phi(z)F(z) + \psi(z)G(z)$$

qui est *identiquement* égale à l'unité, et nous pouvons écrire

$$\sum_{k=1}^{m+n} \frac{H(z)}{(z - u_k) H'(u_k)} = 1$$

ou encore, puisque $H(z) = P(z)Q(z)$

$$\sum_{k=1}^m \frac{P(z)Q(z)}{z - u_k} \frac{1}{P'(u_k)Q(u_k)} + \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{P(z)Q(z)}{z - u_k} \frac{1}{P(u_k)Q'(u_k)}.$$

En chassant le dénominateur,

$$\prod_{k=1}^m Q(u_k) = \pm \prod_{k=m+1}^{m+n} P(u_k) = R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n)$$

il vient,

$$\begin{aligned} & R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{P(z)Q(z)Q(u_1)Q(u_2) \dots Q(u_{k-1})Q(u_{k+1}) \dots Q(u_m)}{(z - u_k)P'(u_k)} \\ &\pm \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{P(z)Q(z)P(u_{m+1})P(u_{m+2}) \dots P(u_{k-1})P(u_{k+1}) \dots P(u_{m+n})}{(z - u_k)Q'(u_k)}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{P(z)}{z - u_k}$ et $\frac{Q(z)}{z - u_k}$ sont des fonctions entières de z et de u_k que nous désignerons par $P_1(z; u_k)$ et $Q_1(z; u_k)$; les deux produits

$$Q(u_1) Q(u_2) \dots Q(u_{k-1}) Q(u_{k+1}) \dots Q(u_m)$$

et

$$\pm P(u_{m+1}) P(u_{m+2}) \dots P(u_{k-1}) P(u_{k+1}) \dots P(u_{m+n})$$

sont des fonctions entières de u_k ; nous les désignerons par $Q^*(u_k)$ et $P^*(u_k)$. Alors l'expression $P_1(z; u_k) Q^*(u_k)$ sera une fonction entière de u_k ; à l'aide de l'équation $P(u_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$), nous la réduirons au degré ($m - 1$); elle peut donc être mise sous la forme

$$q_1 u_k^{m-1} + q_2 u_k^{m-2} + \dots + q_m;$$

de même, à l'aide de l'équation $Q(u_k) = 0$ ($k = m + 1, m + 2, \dots, m + n$), l'expression $Q_1(z; u_k) P^*(u_k)$ peut être mise sous la forme

$$p_1 u_k^{n-1} + p_2 u_k^{n-2} + \dots + p_n;$$

les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_m$, désignent des fonctions entières de z .

Nous obtenons ainsi l'égalité,

$$\begin{aligned} & R(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m; \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n) \\ &= Q(z) \sum_{k=1}^m \frac{q_1 u_k^{m-1} + q_2 u_k^{m-2} + \dots + q_m}{P(u_k)} + P(z) \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{p_1 u_k^{n-1} + p_2 u_k^{n-2} + \dots + p_n}{Q(u_k)}. \end{aligned}$$

Les formules d'EULER

$$\sum_{k=1}^m \frac{u_k^{m-i}}{P(u_k)} = \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{u_k^{n-i}}{Q(u_k)} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = 1 \\ 0, & \text{pour } i > 1 \end{cases}$$

nous permettent de réduire cette égalité à la suivante, identique en $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m; \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n$,

$$R(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m; \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n) = q_1(z) Q(z) + p_1(z) P(z).$$

Si donc on nous proposait, dans un cas particulier quelconque, de former la fonction $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ correspondant à deux fonctions données $F(z)$ et $R(z)$, nous formerions à l'aide des indéterminées

u_1, u_2, \dots, u_{m+n} les deux fonctions auxiliaires $P(z)$ et $Q(z)$, et la méthode précédente nous permettrait de déterminer deux fonctions $p_1(z)$ et $q_1(z)$ telles que $p_1(z)P(z) + q_1(z)Q(z)$ se réduise à une fonction entière des indéterminées $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$. Si dans cette fonction, nous substituons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, à $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$, nous obtenons la fonction cherchée,

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Nous pouvons résumer les recherches précédentes en disant que l'unique condition

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha'_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$$

est *suffisante*, pour que les deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ aient un diviseur commun.

3. L'algorithme du plus grand commun diviseur suffit pour nous donner la condition *nécessaire*.

Comme $P(z)$ et $Q(z)$ n'ont, par hypothèse, aucun diviseur commun (puisque leurs coefficients $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$ et $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ sont indéterminés), nous savons trouver deux fonctions entières de $z, \varphi(z)$ et $\psi(z)$, à coefficients rationnels en $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$, telles que

$$\varphi(z)P(z) + \psi(z)Q(z) = 1.$$

Réduisons au même dénominateur les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, et chassons ce dénominateur. L'égalité précédente devient alors

$$p(z)P(z) + q(z)Q(z) = T(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n)$$

où les coefficients de $p(z), q(z)$, et T lui-même sont fonctions entières, à coefficients entiers, de $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$. Si nous réduisons les degrés de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ à $(n-1)$ et $(m-1)$, il est facile de voir que les deux multiplicateurs $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont déterminés univoquement; il en résulte que les trois fonctions $p(z), q(z)$ et T sont, au signe près, également déterminées d'une manière univoque, si nous convenons de débarrasser T et les coefficients de $p(z)$ et $q(z)$ des facteurs qu'ils pourraient avoir tous en commun. L'existence et l'univocité, au signe près, des fonctions entières $p(z), q(z), T$, est ainsi démontrée; elle repose sur la possibilité de trouver les diviseurs d'une fonction entière quelconque.

Ceci posé, supposons que $F(z)$ et $G(z)$ aient un diviseur commun; il faudra alors que ce diviseur soit contenu dans la fonction T que l'on obtient en substituant à $f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n$, les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ des deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$; car l'égalité précédente est identique en $f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n$. Les coefficients des plus hautes puissances de $F(z)$ et de $G(z)$ sont égaux à l'unité; un diviseur commun à $F(z)$ et à $G(z)$ dépend donc nécessairement de z , et, par suite, $T(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n)$ qui est indépendant de z , est égal à zéro.

Nous avons ainsi trouvé une condition nécessaire pour que les deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ aient un diviseur commun.

4. Il est maintenant naturel de rechercher si les deux fonctions

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ et } T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

sont indépendantes ou non, et, si elles ne le sont pas, de chercher à trouver les relations qui les lient l'une à l'autre.

Dans ce but, nous démontrerons d'abord que dans le domaine d'intégrité $(f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n)$, la fonction R est irréductible. Cela est facile. Nous avons, en effet, identiquement en $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$,

$$R(f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n) = \prod_{(h,k)} (u_h - v_k). \quad \binom{h=1, 2, \dots, m}{k=1, 2, \dots, n}$$

Supposons donc que R soit réductible dans le domaine d'intégrité considéré; l'un de ses facteurs contiendra alors nécessairement une des différences du double produit qui est égal à R , par exemple $u_h - v_k$, et si nous désignons ce facteur par R_1 , nous avons identiquement en $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$,

$$R_1(f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n) \equiv 0 \pmod{u_h - v_k}$$

et par suite, à cause de l'identité en u_1, u_2, \dots, u_m ,

$$R_1(f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n) \equiv 0 \pmod{u_i - v_k}. \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Comme les m fonctions linéaires $(u_i - v_k)$, $(i=1, 2, \dots, m)$, n'ont aucun diviseur commun, nous aurons donc, toujours identiquement en $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$,

$$R_1(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n) \equiv 0 \pmod{\prod_{i=1}^m (u_i - v_k)}$$

et par suite, à cause de l'identité en v_1, v_2, \dots, v_n , la même congruence pour $k = 1, 2, \dots, n$, ou encore, comme les n modules $\prod_{i=1}^m (u_i - v_k)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) n'ont aucun diviseur commun,

$$R_1(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n) \equiv 0 \pmod{\prod_{(i,k)} (u_i - v_k)}. \quad \left(\begin{smallmatrix} i=1, 2, \dots, m \\ k=1, 2, \dots, n \end{smallmatrix} \right)$$

Si donc la fonction R_1 contient un facteur linéaire $(u_h - v_k)$ de la résultante $R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n)$, elle contient aussi nécessairement le double produit qui est identique à cette résultante elle-même. L'irréductibilité de R , dans le domaine considéré, est ainsi démontrée.

Ceci posé, comparons les deux fonctions $R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n)$ et $T(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n)$.

Nous avons obtenu les deux égalités

$$\begin{aligned} p_1(z)P(z) + q_1(z)Q(z) &= R \\ p(z)P(z) + q(z)Q(z) &= T. \end{aligned}$$

Nous en tirons, par soustraction,

$$[p_1(z) - p(z)]P(z) + [q_1(z) - q(z)]Q(z) = R - T$$

ou encore, [$q_1(z)$ est différent de zéro]

$$q_1(z)[p_1(z) - p(z)]P(z) + [q_1(z) - q(z)][R - p_1(z)P(z)] = q_1(z)(R - T).$$

Nous voyons donc que la différence $q_1(z)T - q(z)R$, dont le degré, par rapport à z , est plus petit que m , est divisible par $P(z)$ dont le degré, par rapport à z , est égal à m ; ce qui n'est possible que si

$$q_1(z)T - q(z)R = 0.$$

Il faut donc que la fonction $q(z)$ soit contenue dans le produit $q_1(z)T$, et, par suite, que $q(z)$ soit un diviseur de $q_1(z)$; car si $q(z)$ contenait un facteur indépendant de z qui fût également contenu dans T , comme le coefficient de la plus haute puissance de $P(z)$ est l'unité, ce facteur serait

aussi contenu dans $p(z)$, et $p(z)$, $q(z)$, T , auraient un facteur commun contrairement à ce que nous avons dit dans le numéro précédent.

Soit donc

$$q_1(z) = t(z)q(z);$$

remplaçons, dans l'égalité précédente, $q_1(z)$ par sa valeur, et divisons par la fonction $q(z)$ qui est différente de zéro; il vient

$$t(z)T = R.$$

Ainsi T est contenue dans R ; mais R est irréductible; donc

$$T = R.$$

Cette même égalité, démontrée dans le domaine $(f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n)$ a évidemment encore lieu lorsque l'on substitue aux indéterminées $f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n$, les variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, quelles que soient d'ailleurs les relations qui lient ces variables.

La condition nécessaire que nous avons trouvée, et la condition suffisante sont donc identiques, et nous pouvons dire:

»La condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les variables $x', x'', \dots, x^{(v)}$, pour que les deux fonctions entières $f(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ et $g(z; x', x'', \dots, x^{(v)})$ de la page 21 aient un diviseur commun en z , est, dans le cas particulier où $f_0 = g_0 = 1$,

$$R(f_1, f_2, \dots, f_m; g_1, g_2, \dots, g_n) = 0.$$

Cette fonction R est le *résultant* des deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$; d'après ce qui précède, nous savons le former, quels que soient les coefficients de $f(z)$ et de $g(z)$. Remarquons, en passant, qu'en réalité c'est $R = 0$ qui est l'équation résultante des deux équations $f(z) = 0$ et $g(z) = 0$.

5. J'ai, dans ce qui précède, défini le résultant de deux fonctions entières, et, comme une fonction entière *déterminée* des coefficients des deux fonctions entières données, et, comme une fonction entière facile à déterminer dans chaque cas particulier, à l'aide de l'algorithme du plus grand commun diviseur appliqué aux deux fonctions entières données. J'ai ensuite montré que les deux fonctions, ainsi définies, étaient identiques. Il me reste à ramener, au cas particulier considéré, le cas général où les

deux fonctions $f_0(x', x'', \dots, x^{(v)})$ et $g_0(x', x'', \dots, x^{(v)})$ ne sont pas égales à l'unité. Il suffit, de nouveau, de considérer les deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ dans lesquelles les coefficients α_0 et β_0 ne sont pas égaux à l'unité.

Soient

$$F_1(z) = \frac{1}{\alpha_0} F(z) \text{ et } G_1(z) = \frac{1}{\beta_0} G(z);$$

le résultant des deux fonctions $F_1(z)$ et $G_1(z)$ est une fonction entière de $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_m}{\alpha_0}, \frac{\beta_1}{\beta_0}, \frac{\beta_2}{\beta_0}, \dots, \frac{\beta_n}{\beta_0}$. Il est d'ailleurs égal au produit

$$\prod_{k=1}^m G_1(u_k).$$

dans lequel on a remplacé les fonctions symétriques élémentaires de u_1, u_2, \dots, u_m par les coefficients $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_m}{\alpha_0}$. Si donc nous multiplions ce produit par $\alpha_0^n \beta_0^m$, ce qui revient à multiplier le produit

$$\prod_{k=1}^m G(u_k)$$

par α_0^n , nous obtenons une fonction entière de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$; d'ailleurs

$$\mathfrak{f}_0^n \prod_{k=1}^m Q(u_k) = \mathfrak{f}_0^n g_0^m \sum_{k=1}^m \prod_{h=1}^n (u_k - v_h) = g_0^m \prod_{h=1}^n P(v_h).$$

Il convient donc de considérer cette fonction entière, comme le *résultant* des deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$.

Le résultant de $P(z)$ et de $Q(z)$ est irréductible. Nous savons, en effet, que le double produit

$$\prod_{k=1}^m \prod_{h=1}^n (u_k - v_h)$$

est irréductible dans le domaine $(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_m; g_0, \dots, g_n)$; si donc le résultant de $P(z)$ et de $Q(z)$ était réductible, il aurait tout au plus un facteur indépendant de z, \mathfrak{f}_0 ou g_0 . Mais dans le produit

$$\mathfrak{f}_0^n \prod_{k=1}^m Q(u_k)$$

le terme indépendant de u_1, u_2, \dots, u_n , est égal à $f_0^x g_n^m$; et dans le produit

$$g_0^n \prod_{h=1}^n P(r_h)$$

il est égal à $g_0^m f_m^n$. Ni f_0 , ni g_0 ne sont donc contenus dans le résultant des deux fonctions $P(z)$ et $Q(z)$; ce résultant est donc bien irréductible.

Le problème proposé peut ainsi être considéré, comme entièrement résolu.

§ 3.

Domaine général de rationalité.

1. Considérons une fonction entière de x , de degré n , irréductible dans une domaine naturel de rationalité ($\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \dots, \mathfrak{K}^{(n)}$). Egalons cette fonction à zéro; l'équation ainsi obtenue est dite irréductible, et ses n racines $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont dites *fonctions algébriques conjuguées* de $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \dots, \mathfrak{K}^{(n)}$; dans le cas particulier où le domaine se réduit à l'unité, c'est à dire où les coefficients sont des nombres entiers, les racines $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont dites *nombres algébriques conjugués*.

C'est ici que nous supposons connue la démonstration de GAUSS sur l'existence des racines d'une équation algébrique, telle qu'elle a été interprétée par M. KRONECKER, qui, après avoir ramené le cas général à celui des racines réelles, *sépare* tout d'abord les intervalles dans lesquels une équation peut être vérifiée approximativement. (1) Il est alors parfaitement rigoureux, pour abrégé le langage, de dire qu'une équation a n racines. Cette introduction en algèbre d'un symbole qui lui est étranger, a, comme je l'ai exposé dans le premier chapitre de ce mémoire, au moins dans l'état actuel de la science, ses avantages et ses inconvénients. Pour faire saisir, en partie du moins, les uns et les autres, je reprendrai dans le chapitre suivant, à l'aide des systèmes de diviseurs, la question importante que j'aborderai tout à l'heure, dans le paragraphe

(1) Comparez page 4.

4 de ce chapitre, à l'aide des fonctions algébriques, et je montrerai comment on peut la résoudre sans l'emploi de ces symboles. Mais comme il m'a été impossible de démontrer de la même manière la décomposition générale des systèmes de diviseurs, dont la question traitée dans le paragraphe 4 n'est qu'un cas particulier, j'ai préféré introduire, dès maintenant, les éléments auxiliaires, dont j'aurais parfaitement pu me passer dans tout ce chapitre. Je ne les ai pas introduits, dès le début de ce chapitre, parce que quelques-uns des résultats obtenus jusqu'ici sont nécessaires pour la démonstration de la séparation des racines possibles d'une équation algébrique donnée, et de l'existence d'un nombre rationnel vérifiant cette équation avec une approximation aussi grande que l'on veut.

Ainsi nous parlerons de fonctions algébriques, de nombre algébriques; mais, encore une fois, il est bien entendu que ces fonctions algébriques, ces nombres algébriques, n'ont aucune existence par eux-mêmes, que nous y adjoindrons toujours l'équation $f(x; \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}) = 0$ qui les définit, f étant une fonction entière, que c'est cette équation qui a un sens algébrique, que c'est son adjonction qui seule nous permet d'introduire, pour abréger, l'idée approximative de fonction algébrique, au même titre que celle de fonction rationnelle.

2. Dans un grand nombre de recherches les éléments du domaine de rationalité sont liés par une équation algébrique. Nous *dirons* alors que, dans ces recherches, on considère comme connue une fonction algébrique déterminée ou encore que nous *adjoignons* au domaine naturel de rationalité $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ une fonction algébrique \mathfrak{G} de ces indéterminées. Le nouveau domaine $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ comprend toutes les fonctions rationnelles de $\mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$. Ces fonctions rationnelles sont, toutes, des fonctions algébriques de $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$. En effet, si \mathfrak{G} est racine de $F(\mathfrak{G}) = 0$ et si $R(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_1$ désigne une fonction rationnelle quelconque de $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1$ sera racine de l'équation

$$\Pi(z - \mathfrak{G}_1) = 0$$

où le produit est étendu à toutes les racines de $F(\mathfrak{G}) = 0$. Ce produit est fonction symétrique des racines de l'équation $F(\mathfrak{G}) = 0$, donc fonction rationnelle des coefficients de cette équation. \mathfrak{G}_1 et \mathfrak{G} , et, par suite, toutes les fonctions du domaine $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ sont donc fonctions algébriques des mêmes indéterminées.

Parmi les fonctions algébriques comprises dans le domaine

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{X}, \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$$

celles qui sont d'un *ordre* donné k , c'est à dire celles qui vérifient une équation dont le degré est k , forment un *genre d'ordre* k . \mathfrak{G} étant d'ordre n , il y a certainement un genre d'ordre n . Ce genre *dérive* du domaine naturel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$.

Les fonctions algébriques conjuguées déterminent des genres qui s'ils sont différents, sont dits *genres conjugués*.

Le nombre k est nécessairement un diviseur du nombre n . Soit, en effet,

$$F(\mathfrak{G}; \mathfrak{X}, \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}) = 0$$

une équation irréductible de degré n , définissant les fonctions conjuguées $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_n$; et soit

$$\mathfrak{g} = \phi(\mathfrak{G}_k, \mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$$

une fonction rationnelle de $\mathfrak{G}_k, \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$. Le produit

$$\prod_{k=1}^n [\mathfrak{g} - \phi(\mathfrak{G}_k)]$$

est une fonction entière de \mathfrak{g} dont les coefficients sont fonctions rationnelles de $\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$. Cette fonction entière $G(\mathfrak{g}; \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$ peut être réductible; soit $H(\mathfrak{g}; \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$ un de ses facteurs irréductibles. Comme la fonction entière $H[\phi(\mathfrak{G}_k); \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}]$ s'annule pour une des n racines \mathfrak{G}_k de l'équation irréductible $F(\mathfrak{G}) = 0$, elle s'annule pour toutes les racines de cette équation. Ainsi

$$H[\phi(\mathfrak{G}_k); \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}] = 0$$

pour $k = 1, 2, \dots, n$. Cette même relation ayant lieu pour tous les facteurs irréductibles de $G(\mathfrak{g}; \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$, ces facteurs irréductibles sont identiques, et nous avons

$$G(\mathfrak{g}; \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}) = H^{\nu}(\mathfrak{g}; \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}).$$

Il en résulte que l'ordre k de \mathfrak{g} est égal à un diviseur de n ; $n = k.\nu$.

Pour voir comment se groupent les fonctions algébriques \mathfrak{G} , si nous considérons les fonctions algébriques conjuguées \mathfrak{g} , comme connues, posons

$$\mathfrak{g}_{\lambda k+i} = \mathfrak{g}_i \quad \left(\begin{matrix} \lambda=1, 2, \dots, (\nu-1) \\ i=1, 2, \dots, k \end{matrix} \right)$$

et désignons par $\mathcal{V}(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}_i)$ le plus grand commun diviseur de $F(\mathfrak{G})$ et de $\mathcal{C}(\mathfrak{G}) - \mathfrak{g}_i$. Nous aurons alors

$$\mathcal{V}(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}_i) = \prod_{k=0}^{\nu-1} (\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_{\lambda k+i}) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

d'où

$$F(\mathfrak{G}) = \prod_{i=1}^k \mathcal{V}(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}_i).$$

Ainsi la fonction $F(\mathfrak{G})$, irréductible dans le domaine naturel de rationalité, devient réductible si nous adjoignons à ce domaine les racines de l'équation $H(\mathfrak{g}; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}) = 0$. Ses n facteurs linéaires se partagent en k groupes contenant chacun $\frac{n}{k}$ éléments. Afin de mettre en évidence cette dépendance de \mathfrak{G} et de \mathfrak{g} , nous dirons que le genre \mathfrak{g} est contenu dans le genre \mathfrak{G} , et que le genre \mathfrak{G} contient le genre \mathfrak{g} . Lorsque deux genres se contiennent réciproquement, ils sont identiques. Ainsi toutes les fonctions du domaine $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ font ou bien partie du genre \mathfrak{G} , ou elles sont contenues dans ce genre. Les fonctions rationnelles de $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$, pouvant être considérées comme des fonctions algébriques d'ordre un , font elles-mêmes partie du domaine $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ de sorte que le domaine naturel de rationalité $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ est contenu dans le domaine $(\mathfrak{G}; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ qu'il a engendré par adjonction de la fonction algébrique \mathfrak{G} .

L'adjonction d'une racine d'une fonction entière égale à zéro, à un domaine $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ ne donne naissance qu'à des genres dérivés du domaine considéré, même si les coefficients de la fonction entière font eux-mêmes partie d'un genre dérivé de ce domaine. En effet, dans un domaine déterminé, une fonction algébrique d'une fonction algébrique est une fonction algébrique; car, si $F(x; \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}) = 0$ et $G(y; x, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}) = 0$ et que ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) désignent les racines de $F = 0$, le produit $\prod_{(i)} G(y; \xi_i, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ étendu à toutes les racines ξ_i , est une fonction

symétrique de ces racines, et, par suite, une fonction entière de y , dont les coefficients sont fonctions rationnelles de $\mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$.

Ainsi en répétant plusieurs fois l'opération auxiliaire qui définit les nombres et les fonctions algébriques, nous n'obtenons rien de nouveau. L'idée de genre suffit pour nous rendre compte des domaines qui sont alors engendrés par le domaine naturel de rationalité. Suffit-elle également pour nous rendre compte de ce que devient ce domaine naturel de rationalité, si nous lui adjoignons un nombre quelconque de fonctions algébriques de ses éléments, ou est-il nécessaire d'introduire, dans nos recherches, une idée plus générale? C'est ce que nous allons étudier maintenant.

3. Soient $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(\nu)}$, ν fonctions algébriques des variables indéterminées $\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$, définies par les relations,

$$f_1(\rho^{(1)}) = 0; f_2(\rho^{(2)}) = 0; \dots, f_\nu(\rho^{(\nu)}) = 0;$$

et u_1, u_2, \dots, u_ν , ν variables auxiliaires. Considérons le produit

$$\prod (z - u_1 \rho^{(1)} - u_2 \rho^{(2)} - \dots - u_\nu \rho^{(\nu)})$$

étendu à toutes les valeurs conjuguées de $\rho^{(1)}$, de $\rho^{(2)}$, ... et de $\rho^{(\nu)}$. Ce produit est une fonction symétrique des racines de chacune des équations $f_1(\rho^{(1)}) = 0, f_2(\rho^{(2)}) = 0, \dots, f_\nu(\rho^{(\nu)}) = 0$; c'est donc une fonction de z dont les coefficients sont fonctions rationnelles des variables indéterminées $\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'', \dots, \mathfrak{X}^{(n)}$, et fonctions entières des variables auxiliaires u_1, u_2, \dots, u_ν . Soit $H(z; u_1, u_2, \dots, u_\nu; \mathfrak{X}', \dots, \mathfrak{X}^{(n)})$ un de ses facteurs irréductibles. Nous aurons évidemment

$$H(z; u_1, u_2, \dots, u_\nu) = \prod_{(h)} (z - u_1 \rho_h^{(1)} - u_2 \rho_h^{(2)} - \dots - u_\nu \rho_h^{(\nu)})$$

le produit n'étant étendu qu'à un certain nombre des valeurs conjuguées de $\rho^{(1)}$, de $\rho^{(2)}$, ... et de $\rho^{(\nu)}$. Mais alors, si v_1, v_2, \dots, v_ν désignent ν nouvelles variables auxiliaires, nous avons

$$\begin{aligned} & H(z; u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_\nu + v_\nu) \\ &= \prod_{(h)} (z - u_1 \rho_h^{(1)} - \dots - u_\nu \rho_h^{(\nu)} - v_1 \rho_h^{(1)} - \dots - v_\nu \rho_h^{(\nu)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & H(z - v_1\rho_1^{(1)} - v_2\rho_1^{(2)} - \dots - v_\nu\rho_1^{(\nu)}; u_1, u_2, \dots, u_\nu) \\ &= \prod_{(h)} (z - u_1\rho_h^{(1)} - \dots - u_\nu\rho_h^{(\nu)} - v_1\rho_1^{(1)} - \dots - v_\nu\rho_1^{(\nu)}). \end{aligned}$$

Ces deux fonctions ont un diviseur commun,

$$z - u_1\rho_1^{(1)} - u_2\rho_1^{(2)} - \dots - u_\nu\rho_1^{(\nu)} - v_1\rho_1^{(1)} - v_2\rho_1^{(2)} - \dots - v_\nu\rho_1^{(\nu)}.$$

En général ils n'en ont point d'autre; car de l'équation

$$\begin{aligned} & z - u_1\rho_h^{(1)} - u_2\rho_h^{(2)} - \dots - u_\nu\rho_h^{(\nu)} - v_1\rho_1^{(1)} - v_2\rho_h^{(2)} - \dots - v_\nu\rho_h^{(\nu)} \\ &= z - u_1\rho_k^{(1)} - u_2\rho_k^{(2)} - \dots - u_\nu\rho_k^{(\nu)} - v_1\rho_1^{(1)} - v_2\rho_1^{(2)} - \dots - v_\nu\rho_1^{(\nu)}, \end{aligned}$$

il résulterait

$$v_1\rho_h^{(1)} + v_2\rho_h^{(2)} + \dots + v_\nu\rho_h^{(\nu)} = v_1\rho_1^{(1)} + v_2\rho_1^{(2)} + \dots + v_\nu\rho_1^{(\nu)}$$

et, par suite, le discriminant de la fonction *irréductible*,

$$H(z; v_1, v_2, \dots, v_\nu)$$

serait nul. Si donc nous donnons au système de variables v_1, v_2, \dots, v_ν , une valeur quelconque a_1, a_2, \dots, a_ν , différente de la variété $(\nu-1)^{\text{ième}}$ qui seule peut annuler le discriminant de $H(z; v_1, v_2, \dots, v_\nu)$, l'expression $z - u_1\rho_1^{(1)} - \dots - u_\nu\rho_1^{(\nu)} - a_1\rho_1^{(1)} - \dots - a_\nu\rho_1^{(\nu)}$ est le plus grand commun diviseur des deux fonctions $H(z; u_1 + a_1, \dots, u_\nu + a_\nu)$ et $H(z - a_1\rho_1^{(1)} - \dots - a_\nu\rho_1^{(\nu)}; u_1, u_2, \dots, u_\nu)$. Mais alors l'expression

$$u_1\rho_1^{(1)} + u_2\rho_1^{(2)} + \dots + u_\nu\rho_1^{(\nu)} + a_1\rho_1^{(1)} + a_2\rho_1^{(2)} + \dots + a_\nu\rho_1^{(\nu)}$$

est fonction rationnelle de $a_1\rho_1^{(1)} + a_2\rho_1^{(2)} + \dots + a_\nu\rho_1^{(\nu)}, u_1, u_2, \dots, u_\nu$, et, par suite, $u_1\rho_1^{(1)} + u_2\rho_1^{(2)} + \dots + u_\nu\rho_1^{(\nu)}$ est fonction rationnelle de $a_1\rho_1^{(1)} + a_2\rho_1^{(2)} + \dots + a_\nu\rho_1^{(\nu)}, u_1, u_2, \dots, u_\nu$. Ce que nous venons de dire de la fonction algébrique ρ_1 , a lieu de même pour chacune de ses conjuguées. Nous pouvons donc dire que

$$u_1\rho^{(1)} + u_2\rho^{(2)} + \dots + u_\nu\rho^{(\nu)}$$

est fonction rationnelle de $a_1\rho^{(1)} + \dots + a_\nu\rho^{(\nu)}; u_1, u_2, \dots, u_\nu$. En donnant à u_1, u_2, \dots, u_ν des valeurs convenables, il en résulte que

chacune des fonctions $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(\nu)}$ est fonction rationnelle de $a_1\rho^{(1)} + a_2\rho^{(2)} + \dots + a_\nu\rho^{(\nu)}$. D'autre part, $a_1\rho^{(1)} + a_2\rho^{(2)} + \dots + a_\nu\rho^{(\nu)}$ est manifestement fonction rationnelle de $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(\nu)}$. Le genre $(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(\nu)}; \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)})$ est, par suite, identique au genre $(a_1\rho^{(1)} + a_2\rho^{(2)} + \dots + a_\nu\rho^{(\nu)}; \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)})$.

La question posée est ainsi résolue; l'adjonction d'un nombre quelconque de fonctions algébriques aux indéterminées et aux entiers qui composent le domaine naturel de rationalité, est identique à celle d'une seule fonction algébrique à ce même domaine. C'est pourquoi nous nommons un domaine de la forme

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)})$$

domaine général de rationalité.

Le domaine général de rationalité embrasse le domaine naturel correspondant. Dorénavant lorsque nous parlerons d'un domaine de rationalité, nous entendrons par là, indistinctement un domaine général ou naturel de rationalité; ainsi dans le domaine $(\mathfrak{G}; \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)})$ il ne sera pas indispensable que \mathfrak{G} figure vraiment. Lorsqu'il sera nécessaire de distinguer entre les deux cas, nous ajouterons l'adjectif naturel ou engendré suivant que \mathfrak{G} ne figure pas, ou figure, dans le domaine

$$(\mathfrak{G}; \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)}).$$

4. On pourrait enfin supposer que les variables-indéterminées soient liées, non par les relations particulières

$$f_k(\rho^{(k)}; \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)}) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \nu)$$

qui définissent ν fonctions algébriques $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(\nu)}$, mais par un nombre quelconque d'équations algébriques entre les variables indéterminées $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(\nu)}, \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \dots, \mathfrak{N}^{(\nu)}$, c'est à dire entre un nombre quelconque de variables-indéterminées.

Je démontrerai plus tard que le domaine ainsi-formé ne donne, lui aussi, naissance à rien de nouveau. C'est dans la démonstration de ce théorème que consiste précisément le problème général de l'élimination, dans le cas particulier où le domaine de rationalité est égal à l'unité. Les premières recherches sur la divisibilité nous amènent ainsi à étudier

le problème général de l'élimination. Il suffit, pour le moment, d'avoir réduit l'adjonction d'un nombre quelconque de fonctions algébriques à l'adjonction d'une seule fonction algébrique, et d'avoir ainsi introduit l'idée de domaine général de rationalité dans nos recherches d'Algèbre.

§ 4.

Réductibilité des fonctions entières dans un domaine général de rationalité.

1. L'idée d'irréductibilité est relative. Elle dépend du domaine de rationalité que nous fixons au début de nos recherches. Il est donc naturel de nous demander si nous pouvons l'étendre à un domaine *général* de rationalité.

Rien n'est moins évident. Car la méthode que nous avons suivie pour reconnaître si, dans un domaine naturel de rationalité, une fonction entière a des facteurs ou non, n'est plus applicable.

A la vérité, nous pourrions donner une définition logique de l'irréductibilité. Mais il nous faut une définition algébrique comme nous l'avons fait remarquer dans le premier chapitre.

Nous devons donc, tout d'abord, donner une nouvelle méthode qui permette, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, de reconnaître si une fonction entière de plusieurs variables, dont les coefficients font partie d'un domaine général de rationalité $(\rho; \mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \dots, \mathfrak{K}^{(n)})$, peut, ou non, être mise sous la forme d'un produit de fonctions entières de ces variables, dont les coefficients fassent, eux aussi, partie du domaine $(\rho; \mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \dots, \mathfrak{K}^{(n)})$, et qui, dans le premier cas, donne le moyen de trouver ces facteurs.

Ordonnons par rapport à l'une des variables, z . Si le coefficient A de la plus haute puissance de z est différent de l'unité, nous décomposerons la fonction considérée en deux facteurs dont l'un est A et l'autre une fonction de z dont les coefficients font partie du domaine $(\rho; \mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \dots, \mathfrak{K}^{(n)})$, le coefficient de la plus haute puissance étant égal à l'unité. Deux cas peuvent alors se présenter. Ou bien A contient au moins une nouvelle variable indépendante z' , et alors nous pouvons, en ordonnant A par

rapport à z' , répéter sur A , qui contient une variable de moins, les mêmes raisonnements que sur toute la fonction considérée. Ou bien A ne contient que ρ et les variables-indéterminées et alors il ne serait d'aucune utilité de décomposer A . Nous pouvons donc supposer, sans restriction aucune, que le coefficient de la plus haute puissance de z est égal à l'unité.

Attachons-nous d'abord, pour plus de clarté, au cas où il n'y a qu'une seule variable z . Il est toujours permis de supposer que la fonction donnée $F(z)$ ne contienne pas de facteurs multiples; car, si elle en contenait nous considérerions non pas cette fonction, mais la suivante,

$$\frac{F(z)}{\text{Dv}[F(z), F'(z)]}$$

en convenant, une fois pour toutes, de représenter par $\text{Dv}[\varphi(x), \psi(x)]$ le plus grand commun diviseur des deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Nous savons toujours, par un nombre fini d'opérations rationnelles, former cette fonction qui ne contient que les facteurs simples de $F(z)$ et qui les contient tous.

Remarquons ensuite que dans un certain nombre de recherches les coefficients de la fonction entière donnée font simplement partie d'un domaine naturel de rationalité ($\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(v)}$) et que c'est cependant le domaine général ($\rho; \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(v)}$) que l'on considère comme connu. Nous avons alors à faire une recherche analogue à la précédente. Les deux cas ont ceci de commun que dans tous deux nous cherchons à savoir si la fonction donnée contient ou non un facteur dans un domaine déterminé ($\rho; \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(v)}$). Pour n'avoir pas à distinguer entre eux, nous considérerons, non pas la fonction $F(z; \rho, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(v)})$ où ρ pourrait ne figurer qu'en apparence dans les coefficients des différentes puissances de z , mais la fonction

$$F(z + u\rho; \rho, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(v)})$$

où u désigne une indéterminée. Nous sommes alors certain que ρ figure dans les coefficients des différentes puissances de la variable z ; quant à l'indéterminée u nous savons que son adjonction ne peut en rien changer la réductibilité d'une fonction quelconque; d'autre part, si nous donnons une méthode pour trouver les facteurs contenus dans la fonction $F(z + u\rho; \rho, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(v)})$, considérée comme fonction de $(z + u\rho)$,

il est bien évident que, u étant une indéterminée, nous aurons, en même temps, les facteurs cherchés, contenus en $F(z; \rho, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$.

2. Ceci posé, soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda$, les λ racines de l'équation $f(\rho) = 0$, qui définit ρ . Formons le produit

$$\prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)});$$

cette expression est symétrique dans les racines de $f(\rho) = 0$; c'est donc une fonction entière de z , dont les coefficients font partie du domaine $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$. Nous savons trouver les facteurs irréductibles d'une fonction entière, dans un domaine naturel de rationalité; nous pouvons donc écrire, en sous-entendant les variables-indéterminées $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$,

$$\prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k) = V_1^{\mu_1}(z) V_2^{\mu_2}(z) \dots V_n^{\mu_n}(z)$$

où $V_h(z)$, ($h = 1, 2, \dots, n$) désigne une fonction entière de z , irréductible dans le domaine $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$, et contient en outre l'indéterminée u . Les μ_h sont des nombres entiers. Pour nous rendre compte de la grandeur de ces entiers, prenons, dans l'égalité précédente, la dérivée, par rapport à z , des termes de droite et de gauche.

Nous obtenons, à droite,

$$V_1^{\mu_1-1}(z) V_2^{\mu_2-1}(z) \dots V_n^{\mu_n-1}(z) \sum_{i=1}^n [\mu_i V_1(z) V_2(z) \dots V_{i-1}(z) V_{i+1}(z) \dots V_n(z)].$$

Si donc l'un seulement des entiers μ , était plus grand que l'unité, la dérivée du terme de droite et, par suite, celle du terme de gauche, c'est à dire celle du produit considéré, aurait un facteur commun avec ce produit lui-même. Cette dérivée étant égale à

$$\sum_{k=1}^{\lambda} \left(\frac{F'(z + u\rho_k; \rho_k)}{F(z + u\rho_k; \rho_k)} \cdot \prod_{h=1}^{\lambda} F(z + u\rho_h; \rho_h) \right)$$

il faudrait donc que l'un des facteurs du produit, $F(z + u\rho_1; \rho_1)$ par exemple, et

$$F(z + u\rho_1; \rho_1) F(z + u\rho_2; \rho_2) F(z + u\rho_3; \rho_3) \dots F(z + u\rho_\lambda; \rho_\lambda)$$

eussent un facteur commun; comme nous avons eu soin de débarrasser, tout d'abord, la fonction $F(z)$ de ses facteurs multiples, il faudrait donc aussi que $F(z + u\rho_1; \rho_1)$ et $F(z + u\rho_k; \rho_k)$, par exemple, pour $k > 1$, et, par suite, en posant $z + u\rho_1 = y$, que $F(y; \rho_1)$ et $F[y + u(\rho_k - \rho_1); \rho_k]$ eussent un facteur commun.

En développant la dernière fonction suivant les puissances de u , on a

$$F[y + u(\rho_k - \rho_1); \rho_k] = F(y; \rho_k) + u(\rho_k - \rho_1)F'(y; \rho_k) + \dots + u^n(\rho_k - \rho_1)^n.$$

Mais u est une indéterminée; il faudrait donc que $F(y; \rho_1)$ et $(\rho_k - \rho_1)^n$ qui est indépendant de y , eussent un diviseur commun, contrairement à l'hypothèse $\Delta = 1$.

Nous avons ainsi montré qu'aucun des entiers μ n'est plus grand que m , et nous pouvons maintenant écrire,

$$\prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k) = V_1(z)V_2(z) \dots V_n(z).$$

La fonction entière de z , $F(z + u\rho_1; \rho_1)$ a d'ailleurs, manifestement, un diviseur commun avec l'une des fonctions $V_k(z)$, avec $V_1(z)$, par exemple. Si nous désignons par $\theta_1(z; \rho_1)$ le plus grand commun diviseur de ces deux fonctions, déterminé de manière que le coefficient de la plus haute puissance de z soit égal à l'unité, et par $\varphi(z; \rho_1)$, $\phi(z; \rho_1)$, $\Phi(z; \rho_1)$, $\Psi(z; \rho_1)$, des fonctions entières de z , nous pouvons donc écrire

$$V_1(z) = \varphi(z; \rho_1)\theta_1(z; \rho_1)$$

$$F(z + u\rho_1; \rho_1) = \phi(z; \rho_1)\theta_1(z; \rho_1)$$

$$\theta_1(z; \rho_1) = \Phi(z; \rho_1)V_1(z) + \Psi(z; \rho_1)F(z + u\rho_1; \rho_1)$$

ou, plus simplement, d'après la convention faite au début de ce paragraphe

$$\theta_1(z; \rho_1) = \text{Dv}[V_1(z); F(z + u\rho_1; \rho_1)].$$

Mais toute fonction rationnelle de ρ qui s'annule pour une racine ρ_1 de l'équation irréductible $f(\rho; \mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \dots, \mathfrak{K}^{(v)}) = 0$ s'annule également, d'après un théorème bien connu, pour toutes les racines ρ_k de cette

équation. Les trois égalités précédentes subsistent donc si nous changeons ρ_1 en ρ_k , et nous avons

$$\theta_1(z; \rho_k) = \text{Dv}[V_1(z); F(z + u\rho_k; \rho_k)]. \quad (k=1, 2, \dots, \lambda)$$

Deux quelconques des fonctions $\theta_1(z; \rho_h)$ et $\theta_1(z; \rho_k)$ sont d'ailleurs premières entre elles; car elles sont respectivement contenues dans les deux fonctions $F(z + u\rho_h; \rho_h)$ et $F(z + u\rho_k; \rho_k)$ que nous savons être sans diviseur commun. Si donc nous considérons le produit

$$\prod_{k=1}^{\lambda} \theta_1(z; \rho_k)$$

qui est une fonction entière de z , dont les coefficients font partie du domaine naturel de rationalité ($\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$), nous voyons que ce produit est un facteur de la fonction entière $V_1(z)$ dont les coefficients font partie du même domaine, et nous avons

$$V_1(z) \equiv 0 \pmod{\prod_{k=1}^{\lambda} \theta_1(z; \rho_k)}.$$

D'autre part, de l'égalité

$$\theta_1(z; \rho_k) = \Phi(z; \rho_k)V_1(z) + \Psi(z; \rho_k)F(z + u\rho_k; \rho_k)$$

qui a lieu pour $k = 1, 2, \dots, \lambda$, nous déduisons la congruence

$$\prod_{k=1}^{\lambda} \theta_1(z; \rho_k) \equiv \prod_{k=1}^{\lambda} \Psi(z; \rho_k) \prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k) \pmod{V_1(z)}$$

et comme $\prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k)$ est égal au produit $\prod_{h=1}^n V_h(z)$, nous avons aussi

$$\prod_{k=1}^{\lambda} \theta_1(z; \rho_k) \equiv 0 \pmod{V_1(z)}.$$

Des deux congruences démontrées résulte l'égalité

$$V_1(z) = \prod_{k=1}^{\lambda} \theta_1(z; \rho_k).$$

Nous avons donc décomposé la fonction $V_1(z)$, irréductible dans le domaine naturel de rationalité ($\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$), en λ facteurs, en adjoignant à ce domaine une fonction algébrique ρ , d'ordre λ , et ses conjuguées.

Si

$$\theta_h(z; \rho_i) = \text{Dv}[V_h(z); F(z + u\rho_i; \rho_i)]$$

nous obtenons, de même, l'égalité

$$V_h(z) = \prod_{k=1}^{\lambda} \theta_h(z; \rho_k).$$

Comme ceci a lieu pour $h = 1, 2, \dots, n$, nous avons aussi

$$\prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k) = \prod_{h=1}^n V_h(z) = \prod_{k=1}^{\lambda} \prod_{h=1}^n \theta_h(z; \rho_k).$$

Considérons maintenant le produit

$$\prod_{h=1}^n \theta_h(z; \rho_k).$$

Comme

$$\theta_h(z; \rho_k) = \psi_h(z; \rho_k) V_h(z) + \varphi_h(z; \rho_k) F(z + u\rho_k; \rho_k)$$

et que

$$\prod_{h=1}^n V_h(z) = \prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k)$$

il est évident que nous avons la congruence

$$\prod_{h=1}^n \theta_h(z; \rho_k) \equiv 0 \pmod{F(z + u\rho_k; \rho_k)}.$$

Ecrivons

$$\prod_{h=1}^n \theta_h(z; \rho_k) = Q(z; \rho_k) F(z + u\rho_k; \rho_k);$$

il en résulte immédiatement,

$$\prod_{k=1}^{\lambda} \prod_{h=1}^n \theta_h(z; \rho_k) = \prod_{k=1}^{\lambda} Q(z; \rho_k) \prod_{k=1}^{\lambda} F(z + u\rho_k; \rho_k)$$

d'où, à cause de l'égalité que nous venons de démontrer,

$$\prod_{k=1}^{\lambda} Q(z; \rho_k) = 1.$$

Chacune des fonctions entières de z , $Q(z; \rho_k)$, est donc indépendante de z et comme le coefficient de la plus haute puissance de z est égal à l'unité dans toutes les fonctions considérées, et, par suite, aussi dans $Q(z; \rho_k)$, nous pouvons écrire

$$Q(z; \rho_k) = 1. \quad (k=1, 2, \dots, \lambda)$$

Ainsi

$$\prod_{h=1}^n \theta_h(z; \rho_k) = F(z + u\rho_k; \rho_k).$$

Chacune des fonctions θ_h contient l'indéterminée u . D'après le théorème fondamental sur la réductibilité des fonctions de plusieurs variables dans un domaine naturel de rationalité, nous savons que θ_h est fonction entière de cette indéterminée u , puisque $F(z + u\rho_k; \rho_k)$ est elle-même fonction entière de u . En développant les deux termes de l'égalité précédente, suivant les puissances de u , nous obtenons donc, enfin, une décomposition de la fonction $F(z; \rho_k)$ dans le domaine général de rationalité $(\rho_k; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(v)})$.

Nous avons ainsi un premier exemple de l'emploi des indéterminées en Algèbre. Si l'on se proposait simplement d'assurer la présence de ρ_k dans les coefficients de $F(z; \rho_k)$ on pourrait aussi poser $z = x + a\rho_k$ et donner à a une valeur quelconque différente de celles qui annulent le résultant de $F(x + a\rho_h; \rho_h)$ et de $F(x + a\rho_k; \rho_k)$, pris par rapport à x . En effet, nous ne nous sommes servis de l'indétermination de u que pour montrer que $F(z + u\rho_h; \rho_h)$ et $F(z + u\rho_k; \rho_k)$ ne pouvaient avoir de diviseurs communs par rapport à z . Et, d'autre part, nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions qui, en général, sont sans diviseur commun, aient un diviseur commun pour des valeurs particulières données à leurs coefficients, est que le résultant de ces deux fonctions s'annule pour les valeurs particulières considérées.

Nous obtiendrions ainsi

$$F(x + a\rho_k; \rho_k) = \prod_{h=1}^n \theta_h(x; \rho_k)$$

donc aussi

$$F(z; \rho_k) = \prod_{h=1}^n \theta_h(z - a\rho_k; \rho_k)$$

et, par suite, la décomposition cherchée.

Cette décomposition ne peut d'ailleurs être poussée plus loin. Car si $\theta_1(z; \rho_k)$, par exemple, contenait une fonction $\gamma_1(z; \rho_k)$ et si nous avions

$$\theta_1(z; \rho_k) = \gamma_1(z; \rho_k) \zeta_1(z; \rho_k)$$

nous aurions la même égalité pour $k = 1, 2, \dots, \lambda$, puisque $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda$ sont les λ racines d'une équation irréductible dans un domaine naturel de rationalité. Nous aurions donc aussi

$$V_1(z) = \prod_{k=1}^{\lambda} \gamma_1(z; \rho_k) \cdot \prod_{k=1}^{\lambda} \zeta_1(z; \rho_k)$$

et comme chacun de ces produits est une fonction entière de z dont les coefficients font partie du domaine naturel $(\Re, \Re', \dots, \Re^{(p)})$, la fonction $V_1(z)$ ne serait pas irréductible dans ce domaine contrairement à la définition de cette fonction.

Enfin la décomposition précédente est univoque. Il est facile de s'en assurer à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, par un raisonnement tout à fait identique à celui du paragraphe 1 de ce chapitre.

3. La décomposition d'une fonction de plusieurs variables en ses facteurs irréductibles, dans un domaine général de rationalité, ne présente plus maintenant aucune espèce de difficultés. En effet, rien n'est changé, dans ce qui précède, si nous considérons plusieurs des variables-indéterminées \Re dont ρ ne dépend pas, comme si elles étaient des variables quelconques, à condition toutefois que F en soit fonction *entière*. Le produit

$$\prod_{k=1}^{\lambda} F(z + n\rho_k; z_1, z_2, \dots, z_r; \rho_k; \Re, \Re'', \dots)$$

où F est une fonction *entière* des variables z, z_1, z_2, \dots, z_r , dont les coefficients sont fonctions rationnelles des variables-indéterminées \Re, \Re'', \dots et de la fonction algébrique ρ de ces variables-indéterminées, est également une fonction entière de z, z_1, \dots, z_r dont les coefficients font partie d'un domaine naturel de rationalité. Mais nous avons démontré que, dans un tel domaine, la décomposition d'une fonction entière de plusieurs variables indépendantes est identique à celle de la même fonction, par rapport à l'une des variables seulement. Dans le cas que nous

considérons, les fonctions θ_k sont donc entières, non seulement en z , mais aussi en z_1, z_2, \dots, z_v .

Le problème que nous nous étions proposé est ainsi résolu. L'adjonction d'une fonction algébrique ρ à un domaine naturel de rationalité rend parfois réductible une fonction entière de z , irréductible dans le domaine naturel considéré.

Désignons par ζ les racines de cette fonction égalée à zéro. Il est intéressant de remarquer qu'il existe entre ρ et ζ une complète réciprocité. Soient, en effet, $F(z)$ une fonction entière de degré n et $G(r)$ une fonction entière de degré k , toutes deux irréductibles dans le domaine considéré. Supposons que par adjonction d'une racine ρ de l'équation $G(r) = 0$, la fonction $F(z)$ devienne réductible et qu'un de ses facteurs soit $f(z; \rho)$. Nous pouvons réduire à $(k - 1)$ le degré de cette fonction par rapport à ρ , à l'aide de l'équation $G(r) = 0$ qui est vérifiée pour $r = \rho$. L'égalité $f(\zeta, \rho) = 0$ nous montre alors que la fonction $f(\zeta, r)$ dont le degré, par rapport à r , est plus petit que k , est égale à zéro pour l'une au moins des racines de l'équation irréductible $G(r) = 0$. L'adjonction de ζ au domaine de rationalité rend donc réductible la fonction irréductible $G(r)$. La réciprocité de ζ et de ρ est ainsi démontrée.

Voici donc l'idée d'irréductibilité étendue aux fonctions entières dont les coefficients font partie d'un domaine général de rationalité. L'étude des fonctions entières quelconques est ramenée à celle des fonctions entières irréductibles quelles que soient les fonctions algébriques des variables indéterminées que nous supposons connues.

Un premier pas est ainsi fait dans la voie de la décomposition des fonctions entières. Il peut être continué dans deux directions différentes. Ou bien l'on peut se proposer d'élargir encore le domaine général de rationalité, comme nous l'avons indiqué à la fin du paragraphe précédent, et si l'on y parvient d'étendre, si possible, au domaine obtenu l'idée d'irréductibilité. Ou bien l'on peut rechercher si plusieurs fonctions que nous embrassons en un système après les avoir débarrassées de leurs facteurs communs dans un domaine général de rationalité, ne peuvent avoir encore un élément arithmétique commun, et si l'on ne peut ainsi étendre l'idée même de décomposition en facteurs. Cette double recherche sera l'objet des chapitres suivants.

CHAPITRE III.

Introduction des systèmes de diviseurs en Algèbre.

§ I.

Définitions.

1. Un système de fonctions d'une, de deux ou de trois variables, égalées à zéro, est susceptible d'une interprétation géométrique.

Une fonction entière d'une variable, $\phi(x)$ égalée à zéro et interprétée sur une droite y définit un nombre fini de points; si la fonction entière $\phi(x)$ est débarrassée de ses facteurs doubles, ces points seront distincts. Nous savons alors que toute fonction $F(x)$ qui, égalée à zéro, définit, entre autres points, ces points distincts, *contient* la fonction $\phi(x)$, et nous observons ainsi une correspondance directe entre l'idée de *contenir*, se rapportant aux fonctions entières d'une variable et celle de système de points, sur une droite, faisant partie d'un autre système de points sur la même droite, se rapportant à ces mêmes fonctions entières d'une variable, égalées à zéro.

Une fonction de deux variables égalée à zéro et interprétée dans un plan y définit une courbe. Considérons deux courbes planes $\phi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$. Deux cas peuvent se présenter suivant que ces deux courbes ont des courbes communes ou n'en ont pas. Si elles ont des courbes communes C , ces courbes seront représentées par le plus grand commun diviseur $\theta(x, y)$ de $\phi(x, y)$ et de $\psi(x, y)$, égalé à zéro, et lorsque les courbes C font partie des courbes définies par une fonction entière $F(x, y)$ égalée à zéro, nous savons que $F(x, y)$ *contient* le plus grand commun diviseur $\theta(x, y)$. Ainsi, ici encore, nous observons une correspondance directe entre l'idée de *contenir* se rapportant aux fonctions entières de deux variables, à leur plus grand commun diviseur, et celle de système de courbes, dans un plan, faisant partie d'un autre système de courbes situées dans le même plan, se rapportant à ces mêmes fonc-

tions entières de deux variables, égalées à zéro. Si elles n'ont pas de courbes communes C , elles peuvent cependant avoir un nombre fini de points communs P . Si ces points sont distincts, on démontre que toute fonction entière de x et de y , $f(x, y)$, qui s'annule pour tous ces points P , est fonction linéaire et homogène de $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$, à coefficients fonctions entières de x et de y . Quoique nous ne donnions la démonstration de ce théorème que dans le chapitre suivant, nous pouvons cependant le supposer connu, dès à présent, parce qu'il s'agit ici simplement de légitimer l'introduction des systèmes de diviseurs en Algèbre, et non pas de démontrer quoi que ce soit. Ce théorème nous montre une correspondance directe entre être fonction homogène et linéaire de deux fonctions entières $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ sans diviseurs communs, et celle de représenter un système de courbes et de points dont font partie les points communs aux deux courbes $\Phi(x, y) = 0$ et $\Psi(x, y) = 0$. C'est pourquoi nous dirons, par analogie avec le cas précédent, que la fonction entière $f(x, y)$ *contient le système* des deux fonctions $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$, que *ce système est contenu* dans $f(x, y)$, ou encore est un *système de diviseurs* de $f(x, y)$.

Il en est de même pour les fonctions entières de trois variables; dans l'étude des formes géométriques définies par ces fonctions égalées à zéro, il faut distinguer deux cas. Ou bien les formes communes à trois fonctions de trois variables égalées à zéro sont des surfaces et alors ces surfaces sont représentées par le plus grand commun diviseur des trois fonctions considérées, égalé à zéro; toute fonction qui *contient* ce plus grand commun diviseur, représente, si nous l'égalons à zéro, entre autres, ces surfaces; nous avons donc, de nouveau, dans ce cas, la même correspondance que pour les fonctions d'une et de deux variables. Ou bien, les formes communes aux trois fonctions considérées égalées à zéro, sont des courbes et des points et alors toute fonction qui, égalée à zéro, représente entre autres ces courbes et ces points est fonction homogène et linéaire des trois fonctions considérées. Nous dirons, de nouveau par analogie, qu'elle *contient le système des trois fonctions considérées*. Mais tandis que pour les fonctions de deux variables, aux courbes communes correspondaient les diviseurs, et, aux points isolés communs, les systèmes de diviseurs des fonctions considérées, ainsi à chaque élément géométrique, courbe et point, une idée analytique différente, les points et les courbes sont encore confondues pour les fonctions de trois variables. Pour distinguer

les deux cas qui peuvent se présenter, celui où des fonctions de trois variables, sans diviseur commun, égales à zéro définissent des courbes et des points, et celui où elles ne définissent que des points, nous dirons, dans le premier cas, que le système de diviseurs est de *rang deux*, et, dans le second cas, qu'il est de *rang trois*. Le rang d'un système ne dépend donc en rien du nombre d'éléments de ce système. Un diviseur de *rang un* d'un système de fonctions entières, est un diviseur de ces fonctions, dans le sens habituel du mot.

Nous pouvons ainsi continuer, et considérer des fonctions d'un nombre quelconque n de variables. Nous dirons alors qu'une fonction entière *contient* un système de fonctions entières lorsqu'elle est exprimable par une fonction linéaire et homogène de ces fonctions entières dont les coefficients soient également fonctions entières des n variables considérées. Comme dans le cas de trois variables, nous distinguerons entre des systèmes de rang un, deux, trois, et ainsi de suite jusqu'à n suivant que les formes géométriques représentées par les fonctions données, égales à zéro, sont de variété $(n-1)^{\text{ième}}$, $(n-2)^{\text{ième}}$, $(n-3)^{\text{ième}}$, et ainsi de suite jusqu'à zéro; dans ce dernier cas elles représentent des points isolés situés dans la variété $n^{\text{ième}}$ donnée. Nous dirons souvent système de diviseurs au lieu de système de fonctions à cause de l'analogie qu'offre un système de fonctions contenu dans une fonction entière avec un facteur, un *diviseur* de cette fonction entière.

2. La définition que nous venons de donner est indépendante de toute interprétation géométrique, sauf toutefois l'idée de *rang* que nous ne pourrions préciser d'une manière arithmétique que dans la théorie générale de l'élimination. Ce qui précède avait simplement pour but de nous faire voir comment on pouvait être amené à donner précisément cette définition de *contenant* et de *contenu* de préférence à toute autre.

Cependant cette définition n'est pas encore complète. Nous n'avons parlé que de variables comme éléments des fonctions entières considérées et, en effet, la géométrie ne peut pas nous donner autre chose. D'après les principes développés dans le chapitre premier de ce Mémoire, il nous reste à tenir compte des *nombres entiers*. C'est pourquoi, étendant encore les définitions précédentes et les faisant concorder avec les recherches arithmétiques que nous avons en vue, nous dirons enfin:

1° Un système de fonctions ou système de diviseurs est l'ensemble d'un

certain nombre de fonctions faisant partie d'un domaine d'intégrité que nous fixons à l'avance. Chacune de ces fonctions est un élément du système.

2° Une fonction faisant partie d'un domaine d'intégrité donné contient un système de diviseurs lorsqu'elle peut être représentée par une fonction homogène et linéaire des éléments du système dont les coefficients fassent également partie du domaine d'intégrité considéré.

Ainsi dire que, dans le domaine d'intégrité $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}]$, la fonction F contient le système (f_1, f_2, \dots, f_k) , c'est dire que l'on peut mettre F sous la forme

$$F = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_k f_k$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ désignant comme F , f_1, f_2, \dots, f_k , des fonctions faisant partie du domaine d'intégrité considéré et n'étant pas toutes nulles. Dans cette dernière égalité, ce qui importe, ce sont manifestement les fonctions f_1, f_2, \dots, f_k , les éléments du système, et non pas les multiplicateurs $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$. Pour bien mettre ce fait en évidence, M. KRONECKER se sert d'une notation analogue à celle dont GAUSS a fait usage dans les *Disquisitiones arithmeticae* et il écrit au lieu de l'égalité précédente, simplement

$$F \equiv 0 \pmod{f_1, f_2, \dots, f_k}$$

ce que nous énoncerons en disant que F est congru à zéro, suivant le système de fonctions, ou le système de diviseurs, (f_1, f_2, \dots, f_k) ; ou encore, pour ne pas nous répéter trop souvent et conserver l'analogie avec le cas particulier où l'on considère la congruence $F \equiv 0 \pmod{f}$, que F est congru à zéro suivant le système de modules (f_1, f_2, \dots, f_k) . Ainsi lorsqu'une fonction faisant partie d'un domaine d'intégrité contient un système de modules faisant partie du même domaine, elle est congrue à zéro suivant ce système de modules et réciproquement.

Enfin, rien ne nous empêche d'étendre encore l'idée de contenir à un système de fonctions faisant partie d'un domaine d'intégrité donné. Nous dirons que

3° Un système de diviseurs contient un autre système de diviseurs lorsque chaque fonction du premier système contient le second système;

4° Lorsque deux systèmes se contiennent réciproquement ils sont équivalents,

et nous écrirons, lorsqu'un système (F_1, F_2, \dots, F_h) en contient un autre (f_1, f_2, \dots, f_k) ,

$$(F_1, F_2, \dots, F_h) \equiv \circ \pmod{f_1, f_2, \dots, f_k}$$

et lorsque les deux systèmes (F_1, F_2, \dots, F_h) et (f_1, f_2, \dots, f_k) sont équivalents,

$$(F_1, F_2, \dots, F_h) \sim (f_1, f_2, \dots, f_k).$$

Cette équivalence représente donc l'ensemble des deux congruences

$$(F_1, F_2, \dots, F_h) \equiv \circ \pmod{f_1, f_2, \dots, f_k}$$

$$(f_1, f_2, \dots, f_k) \equiv \circ \pmod{F_1, F_2, \dots, F_h}$$

ou encore des $(h + k)$ congruences,

$$F_m \equiv \circ \pmod{f_1, f_2, \dots, f_k} \quad (m=1, 2, \dots, h)$$

$$f_n \equiv \circ \pmod{F_1, F_2, \dots, F_h} \quad (n=1, 2, \dots, k)$$

Nous pouvons nous servir du symbole de l'équivalence comme de celui de l'égalité; car il est manifeste que si $a \sim b$ on a aussi $b \sim a$ et que si $a \sim b$ et $b \sim c$ on a aussi $a \sim c$.

Tout ce que nous venons de dire a lieu quel que soit le domaine d'intégrité donné. Rien ne nous empêche, par exemple, de faire déjà les mêmes raisonnements sur le domaine $[1]$, c'est à dire sur les nombres entiers. Cependant, pour l'objet que nous avons en vue, ils ne deviennent indispensables que lorsque nous considérons un domaine d'intégrité contenant au moins une variable \mathfrak{X} . Cela tient à ce que dans le cas où un système est composé de nombres entiers seulement, tout nombre qui peut être mis sous la forme d'une fonction homogène et linéaire des éléments du système est manifestement un multiple de leur plus grand commun diviseur et que, par suite, tout le système est ainsi entièrement remplacé par ce plus grand commun diviseur. Remarquons en passant que cette réduction à la divisibilité telle qu'elle est conçue généralement, que nous obtenons ainsi dans un cas particulier, légitime aussi l'introduction des systèmes de diviseurs en Algèbre.

3. La même réduction aurait lieu si nous considérions exclusivement les fonctions d'une variable. Mais ce ne serait point dans la nature des choses. Dans l'arithmétique plus générale que nous obtenons en considérant, dès le début, les fonctions entières à coefficients entiers d'une et de plusieurs variables indépendantes il est indispensable de ne pas laisser de côté les nombres entiers eux-mêmes. Aussi le domaine d'intégrité $[\mathfrak{K}]$ contient-il non seulement les fonctions entières à coefficients entiers de la variable \mathfrak{K} , mais encore tous les nombres entiers; on peut considérer ces derniers comme fonctions entières à coefficients entiers de \mathfrak{K} , ne contenant que la puissance zéro de cette variable. Et alors il est bien évident que tous les entiers qui peuvent être exprimés en fonction linéaire et homogène d'une série de fonctions entières à coefficients entiers font en quelque sorte partie d'une même famille, car ils ont un caractère commun, et ce caractère ne peut pas être, comme tout à l'heure, simplement donné par le plus grand commun diviseur des fonctions considérées. Ainsi déjà dans un domaine d'intégrité $[\mathfrak{K}]$, les développements précédents sont indispensables.

Un exemple bien simple éclaircira, peut être, ce que ces considérations générales pourraient avoir laissé d'obscur.

Les deux fonctions

$$f_n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

et

$$f_{m,n} = x^{(m-1)n} + x^{(m-2)n} + \dots + x^n + 1$$

où m et n désignent des entiers quelconques, sont premières entre elles. La recherche de leur plus grand commun diviseur nous donne, en effet,

$$f_{m,n} = f_n \cdot \sum_{k=2}^m (k-1)(x^{(m-k)n+1} - x^{(m-k)n}) + m.$$

Nous pouvons donc écrire

$$m \equiv 0 \pmod{f_{m,n}, f_n}$$

et

$$f_{m,n} \equiv 0 \pmod{f_n, m};$$

il est d'ailleurs manifeste que

$$f_n \equiv 0 \pmod{f_{m,n}, f_n}$$

et que

$$f_n \equiv 0 \pmod{f_n, m}.$$

Nous avons donc deux systèmes équivalents

$$(f_{m,n}, f_n) \text{ et } (f_n, m)$$

et, en effet, chacun de ces systèmes contient bien l'autre, ainsi que l'on s'en assure à l'aide des quatre congruences précédentes.

L'équivalence

$$(f_{m,n}, f_n) \sim (f_n, m)$$

nous montre clairement que les deux fonctions $f_{m,n}$ et f_n , quoiqu'étant premières entre elles, ont cependant quelque chose en commun et le nombre m est un des éléments qui caractérise leur liaison.

L'équivalence précédente nous amène à une remarque bien simple à l'aide de laquelle on pourrait caractériser, dès le début de l'arithmétique, un genre de liaison comme celui des deux fonctions $f_{m,n}$ et f_n . Introduire en Arithmétique les fonctions d'une variable, à coefficients entiers, c'est considérer toutes les valeurs que prennent ces fonctions lorsque la variable parcourt successivement toute l'échelle des nombres entiers. Pour comparer entre elles deux fonctions d'une variable, il faut donc comparer deux suites d'entiers, les deux suites que l'on obtient en donnant successivement à la variable toutes les valeurs entières possibles et écrivant les entiers correspondants auxquels se réduisent les deux fonctions entières considérées. Il peut alors se présenter plusieurs cas. Ainsi lorsque les entiers correspondants restent toujours sans diviseur commun, le système des deux fonctions est équivalent à l'unité car le plus grand commun diviseur des deux fonctions ne peut, dans ce cas, être différent de l'unité. Au contraire, lorsque l'on rencontre un nombre infini d'entiers correspondants, ayant des diviseurs communs, tous facteurs d'un nombre déterminé m , ce nombre caractérise certainement, en partie du moins, une liaison entre les deux fonctions considérées. C'est ce qui arrive dans l'exemple précédent. Il est inutile d'insister ici sur cette interprétation que l'on pourrait, sans doute, rendre facilement rigoureuse.

Je voudrais enfin faire une remarque, d'ailleurs bien évidente, sur l'introduction des systèmes de diviseurs en Algèbre. Si, au lieu de dire qu'une fonction contient un système (f_1, f_2, \dots, f_k) lorsqu'elle peut être mise sous la forme d'une fonction linéaire et homogène de f_1, f_2, \dots, f_k , nous disions qu'elle contient le système (f_1, f_2, \dots, f_k) lorsqu'elle peut être mise sous la forme d'une fonction homogène de f_1, f_2, \dots, f_k , d'une dimension donnée quelconque, nous n'obtiendrions rien de nouveau; nous ne ferions que nous limiter dans nos recherches, sans pouvoir en tirer aucun profit. Et nous devons considérer un ensemble *homogène*; car, dans le cas contraire, nous aurions un système dans lequel l'un des éléments devrait être égal à l'unité. Mais alors ce système serait contenu dans l'unité et, par suite, dans tous les nombres; il ne servirait donc à rien de l'introduire dans nos recherches.

4. Après avoir défini l'équivalence des systèmes de fonctions, il faut encore nous entendre sur la manière dont nous voulons *composer* ces systèmes; je dirais *multiplier*, si ici la notion d'égalité n'était pas remplacée par celle d'équivalence.

Il convient de nommer *système composé* de deux systèmes donnés, le système dont les éléments sont obtenus en multipliant, de toutes les manières possibles, les éléments de l'un des systèmes donnés par ceux de l'autre; car le système ainsi formé est, par rapport aux systèmes donnés, ce que le produit de deux fonctions est par rapport à ses facteurs. Nous écrirons donc, par exemple,

$$(a, b)(c, d) \sim (ac, bc, ad, bd).$$

La méthode à suivre pour résoudre le problème de la composition de deux et, par suite, de plusieurs systèmes en un seul étant ainsi fixée par définition, le problème inverse s'impose, celui de donner une méthode pour *décomposer* en plusieurs systèmes plus simples, un système quelconque donné. C'est ce problème qui fera l'objet de toutes les recherches contenues dans la seconde moitié de ce Mémoire.

La première recherche se rapportant à la divisibilité des fonctions entières est celle du plus grand commun diviseur de deux fonctions. Pour suivre une voie analogue à celle du chapitre précédent nous devons donc, tout d'abord, chercher à voir ce qu'il faut entendre par plus grand commun diviseur de deux systèmes de fonctions.

Désignons par (f_1, f_2, \dots, f_m) et $(f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n)$ deux systèmes donnés et formons le système

$$(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Il est contenu dans chacun des systèmes donnés, car il est contenu dans chacun de leurs éléments. De plus, si un système quelconque $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ est contenu dans les deux systèmes donnés, nous avons, par définition,

$$f_k \equiv 0 \pmod{\varphi_1, \varphi_2, \dots} \quad (k=1, 2, \dots, m; m+1, m+2, \dots, n)$$

et, par suite,

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) \equiv 0 \pmod{\varphi_1, \varphi_2, \dots}.$$

Nous voyons donc aussi que tout système $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ contenu dans les deux systèmes (f_1, f_2, \dots, f_m) et $(f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n)$ est également contenu dans leur diviseur commun (f_1, f_2, \dots, f_n) . C'est pourquoi nous dirons que (f_1, f_2, \dots, f_n) est le *plus grand commun diviseur* des deux systèmes (f_1, f_2, \dots, f_m) et $(f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n)$.

Le symbole de M. KRONECKER présente ainsi un grand avantage; il permet de former immédiatement le plus grand commun diviseur de deux systèmes, en juxtaposant leurs éléments, c'est à dire en écrivant les éléments du second système à la suite de ceux du premier et en réunissant tous ces éléments en un seul système. Et cet avantage n'est contrebalancé par aucun désavantage; car il est parfaitement indifférent que nous ayons, dans le système ainsi formé, un plus grand nombre d'éléments que dans les systèmes donnés; le nombre d'éléments d'un système ne complique, en effet, en rien nos recherches; la nature des systèmes ne dépend pas du nombre d'éléments qui les composent.

Remarquons d'ailleurs que rien ne sera changé dans un système de modules, si nous ajoutons à ses éléments une fonction linéaire et homogène de quelques-uns d'entre eux; car, si

$$f_{n+1} \equiv 0 \pmod{f_1, f_2, \dots, f_k} \quad (k \leq n)$$

nous avons, par définition,

$$(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \sim (f_1, f_2, \dots, f_n);$$

nous pouvons donc ajouter aux éléments f_1, f_2, \dots, f_n , l'élément f_{n+1} , ou retrancher des éléments f_1, f_2, \dots, f_{n+1} , ce même élément f_{n+1} .

Ce que nous venons de dire du plus grand commun diviseur de deux systèmes, s'étend immédiatement au plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de systèmes.

Si $f_0 = g_1 f_1 + f_2$, on a

$$(f_0, f_1) \sim (f_0, f_1, f_2) \sim (f_1, f_2).$$

Ainsi $(15, 25) \sim (15, 25, 25 - 15) \sim (15, 10 + 15, 10) \sim (15, 10) \sim (15, 10, 15 - 10) \sim (10 + 5, 10, 5) \sim (10, 5) \sim 5$.

Une remarque intéressante et bien facile à vérifier, est que le procédé de réduction d'un système, dont nous venons de donner un exemple, nous donne, appliqué aux nombres et répété un nombre suffisant de fois, précisément l'algorithme d'EUCLIDE.

Nous pouvons résumer les recherches de ce paragraphe en disant que nous arrivons à la même généralisation de l'idée de *contenant* et de *contenu*, que nous nous plaçons au point de vue de la géométrie ou à celui de l'arithmétique, à condition, toutefois, de tenir compte, dans le premier cas, de la nature des coefficients des fonctions entières considérées. Dans le second cas, cette condition est inutile; il est, en outre, d'autant plus important qu'il se rapporte directement à la fonction elle-même, et non pas à cette fonction égalée à zéro. L'exemple du système $(f_{m,n}, f_n)$, que nous avons donné, nous montre que la géométrie est certainement insuffisante dans nos théories algébriques. Le système $(f_{m,n} = 0, f_n = 0)$ n'est en effet susceptible d'aucune interprétation géométrique.

§ 2.

Résultant pris suivant un module déterminé.

Nous allons maintenant aborder un tout autre ordre de questions et étudier l'algorithme du plus grand commun diviseur, en ne considérant les fonctions entières d'une variable x , que suivant un module

$\mathcal{W}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}); \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$, désignant les éléments d'un domaine d'intégrité donné. Nous développerons cette théorie plus que cela ne serait nécessaire pour résoudre les problèmes proposés dans les paragraphes suivants, parce qu'elle fait partie de la théorie élémentaire des congruences, et permet de simplifier considérablement plusieurs recherches arithmétiques.

Supposons d'abord que le domaine d'intégrité soit $[1]$, et que le module soit simplement un nombre premier p .

Soient alors deux fonctions entières à coefficients entiers $f_1(x)$ et $f_2(x)$ non congrues à zéro suivant le module p ; nous réduisons leurs coefficients à leur plus petit reste, suivant ce module. Si alors a_2 est le coefficient de la plus haute puissance de x , dans $f_2(x)$, on peut toujours déterminer un nombre α_2 tel que la congruence $a_2 \alpha_2 \equiv 1 \pmod{p}$ soit vérifiée. En divisant $f_1(x)$ par $\alpha_2 f_2(x)$ nous obtenons comme quotient une fonction entière à coefficients entiers que nous nommons $g_2(x)$, après avoir réduit ses coefficients suivant le module p ; nous réduisons également, suivant ce même module, les coefficients du reste de la division, et nous obtenons alors une fonction entière que nous désignons par $f_3(x)$. Nous établissons ainsi la congruence

$$f_1(x) - \alpha_2 g_2(x) f_2(x) + f_3(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

En opérant, de même, avec $f_2(x)$ et $f_3(x)$, etc., nous obtenons une suite de congruences,

$$f_{k-1}(x) - \alpha_k g_k(x) f_k(x) + f_{k+1}(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (k=2, 3, \dots, \nu-1)$$

et enfin

$$f_{\nu-1}(x) - \alpha_\nu g_\nu(x) f_\nu(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

où $f_\nu(x)$ est une fonction entière de x , à coefficients entiers, qui peut se réduire à un nombre.

Ces congruences sont tout à fait analogues aux égalités de l'algorithme d'EUCLIDE; elles n'en diffèrent qu'en ce que le signe d'égalité y est remplacé par celui de congruence. Nous en tirons donc immédiatement les trois congruences caractéristiques

$$f_1 \equiv \theta_1 f_\nu \pmod{p}$$

$$f_2 \equiv \theta_2 f_\nu \pmod{p}$$

$$f_\nu \equiv \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 \pmod{p}$$

que nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv 0 \pmod{f_v, p} \\ f_2 &\equiv 0 \pmod{f_v, p} \\ f_v &\equiv 0 \pmod{f_1, f_2, p}. \end{aligned}$$

Les deux premières congruences nous donnent

$$(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{f_v, p}.$$

Le système (f_1, f_2) contient donc le système (f_v, p) . Ici encore on aperçoit clairement l'analogie avec la divisibilité par f_v , de f_1 et de f_2 , divisibilité que nous pouvons déduire des deux premières égalités caractéristiques de l'algorithme d'EUCLIDE

$$f_1 = \theta_1 f_v; \quad f_2 = \theta_2 f_v.$$

De la troisième égalité de cet algorithme nous avons déduit une des deux méthodes qui permettent de former le résultant R de deux fonctions entières, et nous avons démontré que la condition

$$R(f_1, f_2) = 0$$

était nécessaire et suffisante pour que les deux fonctions f_1 et f_2 aient un diviseur commun, dans le cas où $f_v = 1$. Nous allons généraliser ce théorème.

Le résultant de deux fonctions étant une fonction homogène et linéaire de ces deux fonctions, nous avons

$$R(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{f_1, f_2}$$

et, par suite, d'après une remarque faite plus haut,

$$[f_1, f_2, R(f_1, f_2)] \sim (f_1, f_2).$$

Ceci posé, supposons que la congruence $R(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{p}$ n'ait pas lieu. Si p désigne un nombre premier, R et p n'auront alors aucun diviseur commun, et nous aurons, par suite, $(R, p) \sim 1$. Il en résulte immédiatement

$$(f_1, f_2, R, p) \sim (f_1, f_2, 1) \sim 1.$$

Mais $(f_1, f_2, R) \sim (f_1, f_2)$; donc $(f_1, f_2, p) \sim 1$. Comme (f_1, f_2, p) est le plus grand commun diviseur des deux systèmes (f_1, p) et (f_2, p) , nous avons enfin l'équivalence

$$\text{Dv}[(f_1, p), (f_2, p)] \sim 1.$$

Ainsi, si la congruence $R(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{p}$ n'a pas lieu, les deux systèmes n'ont aucun diviseur commun.

Le résultat que nous venons d'obtenir nous montre que si les deux systèmes considérés ont un diviseur commun, il faut que le résultant $R(f_1, f_2)$ soit congru à zéro, suivant le module p .

En voici un exemple: Le système $(x + 3, 7)$ est contenu dans le système $(x^2 + x + 1, 7)$. On a, en effet,

$$(x^2 + x + 1, 7) \sim (x + 3, 7)(x - 2, 7).$$

Le résultant des deux fonctions $(x^2 + x + 1)$ et $(x + 3)$ est d'ailleurs égal à 7; on a donc bien $R \equiv 0 \pmod{7}$.

Réciproquement, si les deux systèmes (f_1, p) et (f_2, p) , où nous désignerons par α et β les coefficients des deux fonctions entières $f_1(x)$ et $f_2(x)$, n'ont point de diviseur commun, la congruence $R(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{p}$ ne saurait avoir lieu. En effet, dans cette hypothèse, comme

$$\text{Dv}[(f_1, p), (f_2, p)] \sim (f_1, f_2, p)$$

nous avons l'équivalence

$$(f_1, f_2, p) \sim 1$$

ou encore la congruence

$$\varphi_1(x)f_1(x) + \varphi_2(x)f_2(x) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Cette congruence est vérifiée identiquement, par rapport à x ; nous pouvons donc écrire, en désignant par u_k une indéterminée,

$$\varphi_1(u_k)f_1(u_k) + \varphi_2(u_k)f_2(u_k) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Nous prendrons pour k toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à $(m + n)$

si m et n indiquent les degrés de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$, par rapport à x . Si alors, nous définissons $P_1(x)$ et $P_2(x)$ par les congruences

$$P_1(x) \equiv \prod_{h=1}^m (x - u_h) \pmod{p}$$

$$P_2(x) \equiv \prod_{h=m+1}^{m+n} (x - u_h) \pmod{p}$$

nous obtenons facilement la congruence

$$\prod_{k=1}^m \{\varphi_1(u_k) f_1(u_k) - \varphi_1(u_k) P_1(u_k) + \varphi_2(u_k) f_2(u_k)\} \equiv 1 \pmod{p};$$

le raisonnement est tout à fait celui du paragraphe 2 du chapitre précédent. Si $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$ désignent les fonctions symétriques élémentaires de u_1, u_2, \dots, u_m et $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ celles de $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{m+n}$, la congruence précédente peut être mise sous la forme

$$\prod_{k=1}^m \left\{ \varphi_1(u_k) \sum_{h=1}^m (-1)^h (\alpha_h - \mathfrak{f}_h) u_k^{m-h} + \varphi_2(u_k) f_2(u_k) \right\} \equiv 1 \pmod{p}$$

ou encore, en posant, comme dans le paragraphe cité,

$$\prod_{k=1}^m f_2(u_k) = R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

et

$$\prod_{k=1}^m \varphi_2(u_k) = S(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m),$$

$$R(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) S(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m) \equiv 1 \pmod{p, \alpha_1 - \mathfrak{f}_1, \dots, \alpha_m - \mathfrak{f}_m}.$$

Cette congruence est vérifiée identiquement en u_1, u_2, \dots, u_m , donc en $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_m$; elle a donc lieu pour $\mathfrak{f}_1 = \alpha_1, \mathfrak{f}_2 = \alpha_2, \dots, \mathfrak{f}_m = \alpha_m$ et comme la valeur de $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ est finie, il est impossible que la congruence

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \equiv 0 \pmod{p}$$

soit vérifiée. On démontre, comme dans le paragraphe cité, l'identité des deux fonctions R que nous venons de définir; on peut alors énoncer le théorème suivant:

»La condition $R(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{p}$ est nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes (f_1, p) et (f_2, p) aient un diviseur commun, et cela quelle que soit la nature particulière des deux fonctions entières de x , $f_1(x)$ et $f_2(x)$, que nous considérons.»

Dans le cas particulier où le résultant des deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est précisément égal au nombre premier p , nous avons aussi

$$p \equiv 0 \pmod{f_1, f_2}.$$

Mais alors, au lieu de $f_v \equiv 0 \pmod{f_1, f_2, p}$, nous pouvons écrire simplement $f_v \equiv 0 \pmod{f_1, f_2}$, et comme

$$(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{f_v, p}$$

nous obtenons l'équivalence

$$(f_1, f_2) \sim (f_v, p).$$

Le cas plus général où le module ne se réduit pas à un nombre premier p , mais est une fonction irréductible $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ d'une variable-indéterminée \mathcal{R} , dont les coefficients font partie du domaine naturel de rationalité $(\mathcal{R}', \dots, \mathcal{R}^{(n)})$, le coefficient de la plus haute puissance étant égal à l'unité, peut être traité de la même manière, lorsque les coefficients de la plus haute puissance de chacune des deux fonctions de x , $f_1(x)$ et $f_2(x)$, sont congrus à l'unité, suivant le module $\mathcal{P}(\mathcal{R})$. Mais il ne faut pas oublier que nous privilégions ainsi l'une des variables-indéterminées du domaine d'intégrité donné; nous pouvons donc seulement dire que le système (f_1, f_2) contient le système (f_v, \mathcal{P}) *relativement* à l'une des indéterminées \mathcal{R} du domaine d'intégrité. Dans ce même sens restreint nous pouvons également énoncer le théorème:

»La congruence $R(f_1, f_2) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}}$, où R désigne le résultant des deux fonctions entières f_1 et f_2 , pris par rapport à x , est nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes (f_1, \mathcal{P}) et (f_2, \mathcal{P}) aient un diviseur commun.»

§ 3.

Application des systèmes de modules à la décomposition d'une fonction entière dans un domaine général de rationalité.

1. L'emploi des systèmes de modules nous permet d'effectuer, plus facilement, la décomposition d'une fonction entière dont les coefficients font partie d'un domaine *général* de rationalité, sans introduire dans nos recherches l'idée de nombre et fonction algébrique. C'est ce que je vais essayer de faire voir dans ce paragraphe.

En reprenant ainsi, sous une autre forme, les recherches du dernier paragraphe du chapitre précédent et en montrant comment elles se traduisent à l'aide des nouveaux symboles, mon but est, surtout, de mettre en évidence, par un exemple, d'une part le rôle important que jouent actuellement dans les recherches d'Algèbre, les fonctions algébriques, les grandes simplifications que l'emploi de ces fonctions peut apporter dans le mécanisme d'une démonstration, et, d'autre part, la méthode à suivre pour éviter précisément l'emploi de ces fonctions. La complication de cette méthode n'est qu'apparente et ne porte *que* sur le mécanisme de la démonstration; loin de rendre la démonstration elle-même plus difficile, elle nous fait, au contraire, apercevoir plus clairement le lien entre les hypothèses que nous faisons et le résultat qui en découle, entre notre point de départ et notre point d'arrivée; et *seule*, elle mérite le nom de méthode algébrique, car, seule, elle se ment dans le domaine particulier à l'Algèbre.

Je commencerai par formuler, à l'aide de notre nouvelle terminologie, le problème proposé d'une manière qui diffère un peu de celle du chapitre précédent. Dans ce problème, les éléments d'un domaine de rationalité $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \dots, \mathfrak{M}^{(n)})$ sont supposés liés par *une* relation algébrique $\Psi(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \dots, \mathfrak{M}^{(n)}) = 0$. Nous pouvons supposer que la fonction entière Ψ soit irréductible, car nous savons décomposer, en ses facteurs irréductibles, toute fonction faisant partie d'un domaine naturel de rationalité.

Il s'agit de décomposer, si possible, une fonction entière de z , $F(z)$ dont les coefficients font partie du domaine $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ ainsi limité par la relation $\psi = 0$, c'est à dire de mettre $F(z)$ sous la forme d'un produit de deux ou plusieurs fonctions de z dont les coefficients fassent également partie du domaine $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ limité par la même relation $\psi = 0$.

Dire que $F(z)$ contient une fonction $F_1(z)$, tandis que $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$, sont liés par l'équation $\psi = 0$, c'est donc dire que $F(z)$ est congru au produit de $F_1(z)$ et d'une autre fonction entière de z , suivant le module ψ , ou, en d'autres termes, c'est dire que $F(z)$ est congru à zéro suivant le système de modules $[F_1(z), \psi]$. La divisibilité des fonctions entières, dans un domaine général de rationalité, revient ainsi à la décomposition des fonctions entières à coefficients faisant partie d'un domaine naturel de rationalité, en systèmes de diviseurs dont l'un des éléments, commun à tous les systèmes, est connu et ne renferme pas la variable indépendante z , ou encore, à décomposer dans un domaine naturel de rationalité, un système donné $[F(z), \psi]$ en d'autres systèmes contenant chacun l'élément ψ . C'est ce problème de la décomposition des systèmes dans un cas très-particulier, que je veux étudier dans ce paragraphe.

A cet effet, je suivrai une voie analogue à celle du dernier paragraphe du chapitre précédent, et, conservant les mêmes notations, je démontrerai d'abord que les entiers désignés par μ_i (page 43) sont nécessairement égaux à l'unité, ou, ce qui revient au même, que le résultant, par rapport à z , du résultant, par rapport à \mathfrak{R}' , des deux fonctions F et ψ , et de la dérivée, par rapport à z , de ce résultant, diffère nécessairement de zéro. Je rappelle que, dans la fonction F , le coefficient de la plus haute puissance de z et, dans la fonction ψ , le coefficient de la plus haute puissance de \mathfrak{R}' , sont supposés égaux à l'unité, et que, de plus, $F(z)$ peut toujours sans restriction aucune, être supposée fonction entière de z et de \mathfrak{R}' sans diviseur commun avec sa dérivée prise par rapport à z , $F'(z)$, tandis que ψ est fonction entière de \mathfrak{R}' seulement,

$$\psi(\mathfrak{R}') = \mathfrak{R}'^n + \phi_1 \mathfrak{R}'^{n-1} + \dots + \phi_n;$$

les coefficients de F et de ψ sont fonctions rationnelles des variables-indéterminées $\mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}$.

Soit $S = R(z; \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)})$ le résultant, par rapport à \mathfrak{R}' , des deux fonctions

$$F(z + t\mathfrak{R}'; \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(n)}) \text{ et } \psi(\mathfrak{R}'; \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(p)})$$

t étant une indéterminée. D'après ce que j'ai exposé sur le résultant de deux fonctions entières, si g_1, g_2, \dots, g_n désignent les fonctions symétriques élémentaires des indéterminées v_1, v_2, \dots, v_n , et si la fonction symétrique de ces indéterminées

$$\prod_{k=1}^n F(z + tv_k; v_k, \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(p)})$$

transformée en une fonction entière de g_1, g_2, \dots, g_n , est égale à

$$\phi(z, t, g_1, g_2, \dots, g_n; \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(p)}),$$

on a

$$S = \phi(z, t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n; \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(p)});$$

et, si la fonction symétrique de v_1, v_2, \dots, v_n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{F'(z + tv_k; v_k)}{F(z + tv_k; v_k)} \prod_{h=1}^n F(z + tv_h; v_h)$$

transformée en une fonction entière de $z, t, g_1, g_2, \dots, g_n$, est égale à

$$\phi_1(z, t, g_1, g_2, \dots, g_n)$$

on a aussi

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \phi_1(z, t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n).$$

Pour abrégé je n'ai plus écrit les éléments $\mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots, \mathfrak{R}^{(p)}$, qui ne sont pas transformés dans le courant de la démonstration.

Formons maintenant le résultant, par rapport à z , des deux fonctions S et $\frac{\partial S}{\partial z}$. Il est égal à

$$T(t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

si nous désignons par $T(t, g_1, g_2, \dots, g_n)$ le résultant; par rapport à z , des deux fonctions

$$\Phi(z, t, g_1, g_2, \dots, g_n) \text{ et } \Phi_1(z, t, g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Ce qu'il faut démontrer, c'est que $T(t, g_1, g_2, \dots, g_n)$ est différent de zéro. En appliquant plusieurs fois les identités

$$R(ab, c) = R(a, c)R(b, c)$$

$$R(a + b, b) = R(a, b)$$

qui découlent immédiatement de la définition même du résultant de deux fonctions entières, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} T(t; g_1, g_2, \dots, g_n) &= R \left\{ \prod_{h=1}^n F(z + tv_h, v_h); \sum_{i=1}^n \frac{F'(z + tv_i, v_i)}{F(z + tv_i, v_i)} \prod_{k=1}^n F(z + tv_k, v_k) \right\} \\ &= \prod_{h=1}^n R \left\{ F(z + tv_h, v_h); \sum_{i=1}^n \frac{F'(z + tv_i, v_i)}{F(z + tv_i, v_i)} \prod_{k=1}^n F(z + tv_k, v_k) \right\} \\ &= \prod_{h=1}^n R \left\{ F(z + tv_h, v_h); \frac{F'(z + tv_h, v_h)}{F(z + tv_h, v_h)} \prod_{k=1}^n F(z + tv_k, v_k) \right\} \\ &= \prod_{h=1}^n R \{ F(z + tv_h, v_h); F'(z + tv_h, v_h) \} \prod_{(h,k)} R \{ F(z + tv_h, v_h); F(z + tv_k, v_k) \}, \\ &\quad (t=1, 2, \dots, (h-1), (h+1), \dots, n) \\ &\quad (h=1, 2, \dots, (h-1), (h+1), \dots, n) \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que chacun des deux produits

$$\prod_{h=1}^n R \{ F(z + tv_h, v_h); F'(z + tv_h, v_h) \}$$

et

$$\prod_{(h,k)} R \{ F(z + tv_h, v_h); F(z + tv_k, v_k) \} \quad (h=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, (h-1), (h+1), \dots, n)$$

est différent de zéro lorsqu'on y remplace les fonctions symétriques élémentaires g_1, g_2, \dots, g_n , par les coefficients $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ de la fonction $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Comme, par hypothèse, les deux fonctions $F(z, \mathfrak{N})$ et $\frac{\partial F(z, \mathfrak{N})}{\partial z}$ n'ont point de diviseur commun et comme t est une indéterminée, les deux fonctions $F(x, \mathfrak{N})$ et $F'(x, \mathfrak{N})$, où $x = z + t\mathfrak{N}$, n'auront également pas de diviseur commun; nous pouvons donc appliquer à ces deux fonctions les raisonnements du paragraphe 2 du chapitre précédent, et, en conservant les mêmes notations, établir l'égalité,

$$\prod_{k=1}^m \{ \phi(u_k, \mathfrak{N}) F(u_k, \mathfrak{N}) - \phi(u_k, \mathfrak{N}) P(u_k, \mathfrak{N}) + \psi(u_k, \mathfrak{N}) F'(u_k, \mathfrak{N}) \} = 1.$$

Cette égalité a lieu pour $\mathfrak{N} = v_1, v_2, \dots, v_n$; nous avons donc aussi

$$\prod_{(h,k)} \{ \phi(u_k, v_h) F(u_k, v_h) - \phi(u_k, v_h) P(u_k, v_h) + \psi(u_k, v_h) F'(u_k, v_h) \} = 1$$

$$\left(\begin{matrix} h=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, m \end{matrix} \right)$$

et, par suite, en posant,

$$F(x, v_h) = x^m - \alpha_1^{(h)} x^{m-1} + \alpha_2^{(h)} x^{m-2} - \dots + (-1)^m \alpha_m^{(h)} \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

$$P(x, v_h) = x^m - \mathfrak{f}_1^{(h)} x^{m-1} + \mathfrak{f}_2^{(h)} x^{m-2} - \dots + (-1)^m \mathfrak{f}_m^{(h)}, \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

$$\prod_{(h,k)} \{ \psi(u_k, v_h) F'(u_k, v_h) \} \equiv 1$$

$$[\text{modd}(\alpha_1^{(1)} - \mathfrak{f}_1^{(1)}), (\alpha_2^{(1)} - \mathfrak{f}_2^{(1)}), \dots, (\alpha_m^{(1)} - \mathfrak{f}_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)} - \mathfrak{f}_1^{(2)}), \dots, (\alpha_m^{(n)} - \mathfrak{f}_m^{(n)})].$$

Soient maintenant

$$\prod_{k=1}^m F'(u_k, v_h) = R(v_h; \mathfrak{f}_1^{(h)}, \mathfrak{f}_2^{(h)}, \dots, \mathfrak{f}_m^{(h)})$$

et

$$\prod_{k=1}^m \psi(u_k, v_h) = S(v_h; \mathfrak{f}_1^{(h)}, \mathfrak{f}_2^{(h)}, \dots, \mathfrak{f}_m^{(h)});$$

nous savons alors que $R(v_h; \alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \dots, \alpha_m^{(h)})$ est bien le résultat des deux fonctions $F(x, v_h)$ et $F'(x, v_h)$. En désignant les fonctions entières de $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$

$$\prod_{h=1}^n R(v_h, \mathfrak{f}_1^{(h)}, \mathfrak{f}_2^{(h)}, \dots, \mathfrak{f}_m^{(h)}) \text{ et } \prod_{h=1}^n S(v_h, \mathfrak{f}_1^{(h)}, \mathfrak{f}_2^{(h)}, \dots, \mathfrak{f}_m^{(h)}) \quad \dagger$$

respectivement par

$$U(g_1, g_2, \dots, g_n, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_m^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_m^{(n)})$$

et

$$V(g_1, g_2, \dots, g_n, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_m^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots, f_m^{(n)}),$$

et en substituant ces expressions dans la congruence précédente, nous avons aussi,

$$U(g_1, g_2, \dots, g_n, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_m^{(n)}) V(g_1, g_2, \dots, g_n, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_m^{(n)}) \equiv 1 \\ \pmod{(\alpha_1^{(1)} - f_1^{(1)}), (\alpha_2^{(1)} - f_2^{(1)}), \dots, (\alpha_m^{(n)} - f_m^{(n)})}.$$

Si dans cette congruence nous substituons aux indéterminées $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_m^{(n)}$, les coefficients $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)}$ des fonctions $F(x, v_1), F(x, v_2), \dots, F(x, v_n)$ considérées comme fonctions de x seulement, elle aura toujours lieu. D'ailleurs, comme pour $i = 1, 2, \dots, m$, les deux fonctions

$$U(g_1, g_2, \dots, g_n, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) \text{ et } V(g_1, g_2, \dots, g_n, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)})$$

sont fonctions symétriques de $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots, \alpha_i^{(n)}$, ces deux fonctions peuvent être transformées en fonctions entières de g_1, g_2, \dots, g_n ne contenant plus explicitement les indéterminées v_1, v_2, \dots, v_n . La congruence que nous venons d'écrire est vérifiée identiquement en g_1, g_2, \dots, g_n ; elle est donc encore vérifiée si, après la transformation indiquée, nous substituons aux indéterminées g_1, g_2, \dots, g_n les coefficients $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ de la fonction $\Psi(\mathfrak{K})$.

Nous avons donc enfin

$$U(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) V(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)}) = 1$$

et comme la fonction entière $V(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)})$ ne peut être infinie, la fonction $U(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)})$ est certainement différente de zéro.

Mais la fonction $U(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(n)})$ représente précisément le premier des deux facteurs de la fonction $T(t; \phi_1, \dots, \phi_n)$ que nous considérons; ainsi, nous avons démontré que le produit

$$\prod_{h=1}^n R\{F(z + tv_h, v_h); F'(z + tv_h, v_h)\}$$

est nécessairement différent de zéro lorsqu'on y remplace les fonctions symétriques élémentaires g_1, g_2, \dots, g_n par les coefficients $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ de la fonction $\Psi(\mathfrak{R})$.

2. Pour démontrer que le double produit

$$\prod_{(h, k)} R(F(z + tv_h, v_h); F(z + tv_k, v_k)) \quad \left(\begin{matrix} h, k=1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{matrix} \right)$$

est également différent de zéro on a besoin du théorème auxiliaire suivant.

» Les deux formes

$$\zeta = \prod_{h=1}^n \{a_0^{(h)} + a_1^{(h)}t + \dots + a_m^{(h)}t^m\} = \sum_{k=0}^{mn} f_k t^k$$

et

$$\psi = \prod_{h=1}^n \{a_0^{(h)} + a_1^{(h)}t_h + \dots + a_m^{(h)}t_h^m\}$$

où t, t_1, t_2, \dots, t_n désignent des indéterminées et les $a_i^{(h)}$ des quantités quelconques, sont liées par une équation algébrique

$$\psi - F_1 \psi^{\nu-1} + F_2 \psi^{\nu-2} - \dots \pm F_\nu = 0$$

dans laquelle F_k ($k = 1, 2, \dots, \nu$) est une fonction homogène des seules quantités f_0, f_1, \dots, f_{mn} de dimension $k^{\text{ième}}$.

Voici comment on démontre simplement ce théorème: (1)

Soient v_1, v_2, \dots, v_{mn} , mn indéterminées. Posons

$$\mathfrak{f}_0 \prod_{(i)} (1 + v_i t) = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 t + \mathfrak{f}_2 t^2 + \dots + \mathfrak{f}_{mn} t^{mn} \quad (i=1, 2, \dots, mn)$$

et

$$g_0 \prod_{(k)} (1 + v_k t) = g_0^{(h)} + g_1^{(h)} t + g_2^{(h)} t^2 + \dots + g_m^{(h)} t^m \quad [k_{h+1} = mh+1, mh+2, \dots, m(h+1)]$$

pour $h = 1, 2, \dots, n$, et considérons l'expression

$$G_0 = \prod_{(h)} \{g_0^{(h)} + g_1^{(h)} t_h + g_2^{(h)} t_h^2 + \dots + g_m^{(h)} t_h^m\} \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

(1) Comparez KRONECKER, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 26 Juillet 1883.

que nous pouvons aussi mettre sous la forme

$$G_0 = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} g_{k_1}^{(1)} g_{k_2}^{(2)} \dots g_{k_n}^{(n)} u_{k_1, k_2, \dots, k_n} \quad \left(\begin{matrix} k_{h+1} = nh+1, nh+2, \dots, m(h+1) \\ h=0, 1, 2, \dots, (n-1) \end{matrix} \right)$$

En examinant les coefficients $g_{k_1}^{(1)} g_{k_2}^{(2)} \dots g_{k_n}^{(n)}$ de cette forme, nous voyons de suite qu'ils sont fonctions entières des indéterminées v_1, v_2, \dots, v_{mn} et ne sont que *linéaires* par rapport à chacune de ces indéterminées. Si nous permutons v_1, v_2, \dots, v_{mn} de toutes les manières possibles la fonction G_0 se change en un certain nombre de fonctions différentes que nous désignerons par $G_1, G_2, \dots, G_{\nu-1}$; chacune de ces fonctions a, comme coefficients, des fonctions entières de v_1, v_2, \dots, v_{mn} , linéaires par rapport à v_1 , à v_2 , ..., à v_{mn} ; si donc nous développons le produit $\prod_{r=0}^{\nu-1} (G - G_r)$ et si

$$\prod_{(r)} (G - G_r) = G^\nu - \mathfrak{F}_1 G^{\nu-1} + \mathfrak{F}_2 G^{\nu-2} - \dots \pm \mathfrak{F}_\nu, \quad [r=0, 1, 2, \dots, (\nu-1)]$$

la fonction *symétrique* \mathfrak{F}_k sera une fonction homogène entière à coefficients entiers des indéterminées f_0, f_1, \dots, f_{mn} , et sa dimension sera égale à k . Nous aurons ainsi

$$G_0^\nu - \mathfrak{F}_1 G_0^{\nu-1} + \mathfrak{F}_2 G_0^{\nu-2} - \dots \pm \mathfrak{F}_\nu = 0$$

et comme cette relation a lieu identiquement en v_1, v_2, \dots, v_{mn} , elle a encore lieu lorsque l'on substitue aux indéterminées $g_0^{(h)}, g_1^{(h)}, \dots, g_m^{(h)}$, les quantités données $a_0^{(h)}, a_1^{(h)}, \dots, a_m^{(h)}$, ce qui change G_0 en Φ ; mais alors il faut aussi substituer à f_0, f_1, \dots, f_{mn} les quantités f_0, f_1, \dots, f_{mn} , et le théorème est démontré.

3. Supposons maintenant que lorsqu'on remplace les indéterminées g_1, g_2, \dots, g_n par $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, le double produit

$$\prod_{(h, k)} R\{F(z + tv_h, v_h); F(z + tv_k, v_k)\} \quad \left(\begin{matrix} h, k=1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{matrix} \right)$$

soit nul. Il en serait alors de même du double produit

$$\prod_{(h, k)} R_x\{F(x, v_h); F[x + t(v_k - v_h), v_k]\} \quad \left(\begin{matrix} h, k=1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{matrix} \right)$$

dans lequel nous avons posé $x = z + tv_h$, le résultant étant formé par rapport à x . Mais alors, après avoir remplacé les indéterminées

g_1, g_2, \dots, g_n , par les quantités données $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, nous aurions aussi l'égalité

$$\prod_{(h,k)} R_x \{ F(x, v_h); F(x, v_k) + t(v_k - v_h) F'(x, v_k) + \dots + t^m(v_k - v_h)^m \} = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, \dots, n \\ h, k = 1, 2, \dots, n \end{smallmatrix} \right)$$

ou encore, en introduisant, comme dans la première partie de notre démonstration, pour $h = 1, 2, \dots, n$, les fonctions auxiliaires

$$P(x, v_h) = \prod_{i=1}^m (x - u_i^{(h)}) = x^m - \tilde{f}_1^{(h)} x^{m-1} + \tilde{f}_2^{(h)} x^{m-2} - \dots \pm \tilde{f}_m^{(h)},$$

$$\prod_{(h,i,k)} \{ F(u_i^{(h)}, v_k) + t(v_k - v_h) F'(u_i^{(h)}, v_k) + \dots + t^m(v_k - v_h)^m \} = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, \dots, n \\ h, i, k = 1, 2, \dots, n \end{smallmatrix} \right)$$

à condition de remplacer, pour $h = 1, 2, \dots, n$, dans la fonction entière de $\tilde{f}_1^{(h)}, \tilde{f}_2^{(h)}, \dots, \tilde{f}_m^{(h)}$ qui représente le terme de gauche de cette égalité, les indéterminées $\tilde{f}_1^{(h)}, \tilde{f}_2^{(h)}, \dots, \tilde{f}_m^{(h)}$, par les coefficients $\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \dots, \alpha_m^{(h)}$, de $F(x, v_h)$ considérée comme fonction de x seulement, puis, après avoir transformé la fonction symétrique de v_1, v_2, \dots, v_n , ainsi obtenue, en une fonction entière de g_1, g_2, \dots, g_n , de remplacer les indéterminées g_1, g_2, \dots, g_n par les quantités données $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.

Ordonnons ce produit par rapport à l'indéterminée t ; tous les coefficients seront nuls. D'après le théorème auxiliaire que nous venons de démontrer, une puissance entière du produit

$$\prod_{(h,i,k)} \{ F(u_i^{(h)}, v_k) + t_{h,k}(v_k - v_h) F'(u_i^{(h)}, v_k) + \dots + t_{h,k}^m(v_k - v_h)^m \} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, \dots, n \\ h, k = 1, 2, \dots, n \end{smallmatrix} \right)$$

sera également nulle; donc aussi ce produit lui-même.

Posons, pour abrégér,

$$t_{h,k}(v_k - v_h) = w_{h,k}^t$$

et introduisons de nouvelles indéterminées $w_{h,k}$ comme coefficients des expressions $F(u_i^{(h)}, v_k)$; nous aurons alors

$$\prod_{(h,i,k)} \{ w_{h,k} F(u_i^{(h)}, v_k) + w_{h,k}^t F'(u_i^{(h)}, v_k) + \dots + w_{h,k}^m \} = L = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ h, k = 1, 2, \dots, n \\ h \geq i \end{smallmatrix} \right)$$

ou encore, en écrivant

$$L - \prod_{(h, i, k)} \{w_{h, k} F(u_i^{(h)}, v_k) + w'_{h, k} F'(u_i^{(h)}, v_k)\} = l \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ h, k = 1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{array} \right)$$

$$\prod_{(h, i, k)} \{w_{h, k} F'(u_i^{(h)}, v_k) + w'_{h, k} F(u_i^{(h)}, v_k)\} + l = 0. \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ h, k = 1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{array} \right)$$

Comme l est une fonction entière de $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, ne contenant plus les indéterminées auxiliaires u et v , et que chacun des termes de l contient au moins une des indéterminées $w_{h, k}$ à une puissance plus élevée que la première, il faut que nous ayons séparément

$$\prod_{(h, i, k)} \{w_{h, k} F(u_i^{(h)}, v_k) + w'_{h, k} F'(u_i^{(h)}, v_k)\} = 0 \quad \text{et} \quad l = 0. \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ h, k = 1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{array} \right)$$

Ainsi, nous avons démontré que si le double produit

$$\prod_{(h, k)} R\{F(z + tv_h, v_h); F'(z + tv_k, v_k)\}$$

est nul, pour t indéterminée, les deux dernières égalités sont vérifiées identiquement dans les indéterminées

$$w_{h, k} \quad \text{et} \quad w'_{h, k}. \quad \left(\begin{array}{l} h, k = 1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{array} \right)$$

Mais, d'autre part, il est facile de donner à ces indéterminées $w_{h, k}$ et $w'_{h, k}$ des valeurs particulières pour lesquelles la dernière égalité n'est pas vérifiée. Nous avons, en effet, vu tout à l'heure que le produit

$$\prod_{k=1}^n R\{F(x, v_k), F'(x, v_k)\}$$

était différent de zéro. Comme l'égalité

$$R_z\{F(z); F'(z)\} = F_1(z)F(z) + F_2(z)F'(z)$$

que l'on peut établir quelle que soit $F(z)$, est vérifiée identiquement en z , nous pouvons aussi dire que le produit

$$\prod_{i=1}^n \{F_1(u_i^{(h)}, v_k) F'(u_i^{(h)}, v_k) + F_2(u_i^{(h)}, v_k) F(u_i^{(h)}, v_k)\}$$

et, par suite, que le triple produit

$$\prod_{(h, i, k)} \{F_1(u_i^{(h)}, v_k) F(u_i^{(h)}, v_k) + F_2(u_i^{(h)}, v_k) F'(u_i^{(h)}, v_k)\} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ h, k = 1, 2, \dots, n \\ h \geq k \end{array} \right)$$

est différent de zéro.

Si donc nous remplaçons les indéterminées $w_{h,k}$ et $w'_{h,k}$ par les fonctions $F_1(u_i^{(h)}, v_k)$ et $F_2(u_i^{(h)}, v_k)$, la fonction symétrique des u et des v ,

$$\prod_{(h, i, k)} \{w_{h,k} F(u_i^{(h)}, v_k) + w'_{h,k} F'(u_i^{(h)}, v_k)\}$$

dans laquelle on remplace les fonctions symétriques élémentaires de $u_1^{(h)}, u_2^{(h)}, \dots, u_m^{(h)}$ par les coefficients de $F(x, v_k)$, considérée comme fonction de x seulement, puis g_1, g_2, \dots, g_n par $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, est différente de zéro. Elle ne saurait donc être nulle pour des $w_{h,k}$ et $w'_{h,k}$ indéterminées, et, par suite, le second facteur du résultant

$$T(t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

n'est pas nul non plus.

Cette recherche est nouvelle. Elle offre un exemple frappant de l'avantage qu'il y a à se servir de méthodes naturelles, sans introduire aucun élément étranger au domaine dans lequel on se meut. C'est, en effet, l'impossibilité dans laquelle je me suis trouvé, de démontrer que le résultant $T(t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ est différent de zéro, sans supposer l'existence des racines des équations algébriques, et à l'aide de la généralisation des idées de contenant et de contenu donnée au début de ce chapitre, qui a amené M. KRONECKER à généraliser d'avantage encore les idées de contenant et de contenu⁽¹⁾ en découvrant le théorème *auxiliaire*⁽²⁾ nécessaire à notre démonstration, théorème qui, en réalité, est *fondamental* en Algèbre.

4. Il est maintenant facile de décomposer, dans un domaine naturel de rationalité, un système donné $[F(z), \mathcal{V}]$ en d'autres systèmes contenant chacun l'élément \mathcal{V} .

(¹) Sitzungsberichte der Berliner Akademie. Séance du 26 Juillet 1883.

(²) Page 71 de ce Mémoire.

En effet, ⁽¹⁾ nous venons de voir que le résultant

$$\Phi(z; t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

qui est entièrement équivalent au système donné, n'a point de facteurs doubles pour t indéterminée; nous pouvons donc toujours remplacer t par une quantité a telle que

$$\Phi(z; a, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

n'ait point de facteurs doubles. Décomposons cette fonction entière de z en ses facteurs irréductibles, dans le domaine naturel de rationalité $(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'', \dots, \mathfrak{K}^{(n)})$ et soit

$$\Phi(z) = V_1(z) V_2(z) \dots V_\nu(z).$$

Comme $\Phi(z)$ est congru à zéro suivant le système de modules $[F(z), \varphi]$ nous avons manifestement l'équivalence

$$[F(z), \varphi] \sim [F(z), \varphi, \prod_{k=1}^{\nu} V_k(z)].$$

D'autre part, si nous composons les deux systèmes

$$[F(z), \varphi, \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z)] \quad \text{et} \quad [F(z), \varphi, V_\nu(z)]$$

il vient

$$\begin{aligned} & [F(z), \varphi, \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z)] [F(z), \varphi, V_\nu(z)] \\ & \sim [F(z), \varphi, F(z) \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z), \varphi \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z), F(z) V_\nu(z), \varphi V_\nu(z), \varphi F(z), \phi(z)] \end{aligned}$$

ou, comme

$$(V_i, V_k) \sim 1 \quad (i, k = 1, 2, \dots, \nu; i \neq k)$$

$$[F(z), \varphi, \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z)] [F(z), \varphi, V_\nu(z)] \sim [F(z), \varphi, \phi(z)].$$

⁽¹⁾ Cette dernière partie de la démonstration a été donnée par M. KRONECKER dans son Cours de 1883.

Ainsi nous avons démontré l'équivalence

$$[F(z), \Psi] \sim [F(z), \Psi, \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z)] [F(z), \Psi, V_\nu(z)]$$

en isolant, en quelque sorte, le facteur $V_\nu(z)$ des autres facteurs irréductibles de $\Phi(z)$.

Nous obtenons de même

$$[F(z), \Psi, \prod_{k=1}^{\nu-1} V_k(z)] \sim [F(z), \Psi, \prod_{k=1}^{\nu-2} V_k(z)] [F(z), \Psi, V_{\nu-1}(z)]$$

en isolant le facteur $V_{\nu-1}(z)$, et en répétant la même opération ν fois, nous avons enfin

$$[F(z), \Psi] \sim \prod_{k=1}^{\nu} [F(z), \Psi, V_k(z)].$$

Formons maintenant le plus grand commun diviseur, suivant le module Ψ , des deux fonctions $F(z)$ et $V_k(z)$. D'après ce que nous avons montré dans le paragraphe précédent nous aurons à la fois, en désignant par $D_k(z)$ ce plus grand commun diviseur, les trois congruences,

$$D_k(z) \equiv 0 \pmod{F(z), V_k(z), \Psi}$$

$$V_k(z) \equiv 0 \pmod{\Psi, D_k(z)}$$

$$F(z) \equiv 0 \pmod{\Psi, D_k(z)}$$

d'où il résulte que l'équivalence

$$[\Psi, D_k(z)] \sim [F(z), V_k(z), \Psi]$$

est vérifiée. Mais nous venons de voir que

$$[F(z), \Psi] \sim \prod_{k=1}^{\nu} [F(z), V_k(z), \Psi];$$

done nous avons démontré l'équivalence

$$[F(z), \Psi] \sim \prod_{k=1}^{\nu} [\Psi, D_k(z)].$$

Les fonctions entières $D_k(z)$ sont premières entre elles; car si $D_h(z)$ et $D_k(z)$ avaient un diviseur commun, il en serait de même de $V_h(z)$ et $V_k(z)$ contrairement à l'hypothèse. En effectuant la composition indiquée dans le terme de droite de l'équivalence précédente, et en tenant compte de la relation

$$[D_i(z), D_k(z)] \sim 1 \quad (i, k=1, 2, \dots, \nu; i \neq k)$$

nous avons successivement

$$\begin{aligned} [\psi, D_1(z)][\psi, D_2(z)] &\sim [\psi, \psi D_1(z), \psi D_2(z), D_1(z)D_2(z)] \sim [\psi, D_1(z)D_2(z)] \\ [\psi, D_1(z)D_2(z)][\psi, D_3(z)] &\sim [\psi, \psi D_1(z)D_2(z), \psi D_3(z), D_1(z)D_2(z)D_3(z)] \\ &\sim [\psi, D_1(z)D_2(z)D_3(z)] \end{aligned}$$

.

$$[\psi, \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z)][\psi, D_\nu(z)] \sim [\psi, \psi \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z), \psi D_\nu(z), \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z)] \sim [\psi, \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z)]$$

ce qui nous donne

$$\prod_{k=1}^{\nu} [\psi, D_k(z)] \sim [\psi, \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z)]$$

et, par suite,

$$[\psi, \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z)] \sim [F(z), \psi].$$

Nous avons ainsi trouvé la décomposition du système donné $[F(z), \psi]$. Il est facile d'en déduire celle de la fonction $F(z)$ dans le domaine général de rationalité considéré. En effet, de l'équivalence précédente nous déduisons la congruence

$$F(z) \equiv 0 \pmod{\psi, \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z)}$$

ou encore l'égalité

$$F(z) = P(z)\psi + Q(z) \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z).$$

Mais $\psi(\Re, \Re'', \dots, \Re^{(\nu)}) = 0$ caractérise notre domaine général de rationalité. Nous avons donc, dans ce domaine,

$$F(z) = Q(z) \prod_{k=1}^{\nu} D_k(z).$$

D'autre part, le produit $\prod_{k=1}^{\nu} D_k$ est congru à zéro suivant le système de modules $[F(z), \psi]$; comme $\psi = 0$, il en résulte l'égalité

$$\prod_{k=1}^{\nu} D_k(z) = q(z) F(z).$$

Ainsi $Q(z)q(z) = 1$; $Q(z)$ et $q(z)$ sont donc indépendants de z , et comme le coefficient de la plus haute puissance de z , dans $F(z)$, est supposé égal à l'unité, $Q = 1$. Chacune des fonctions $D_k(z)$ est d'ailleurs irréductible dans le domaine considéré; en effet si nous avions

$$D_k(z) \equiv \eta_k(z) \zeta_k(z) \pmod{\psi}$$

comme

$$F_k(z) \equiv 0 \pmod{\psi, D_k(z)}$$

il en résulterait

$$F_k(z) \equiv a_k(z) \eta_k(z) \zeta_k(z) \pmod{\psi}$$

et la fonction $F_k(z)$ serait elle-même réductible, contrairement à l'hypothèse.

Le problème proposé est ainsi résolu sans l'emploi des nombres et fonctions algébriques.

CHAPITRE IV.

Décomposition des systèmes de diviseurs.

§ 1.

Cas particulier de deux variables.

1. Nous venons de voir comment, dans un cas très-particulier, on peut décomposer les systèmes de diviseurs en systèmes plus simples. Nous

allons maintenant chercher à étudier la décomposition des systèmes de diviseurs dans le cas général. A cet effet, et pour nous rendre compte de la méthode à suivre, nous commencerons par considérer le cas le plus simple, celui d'un système de deux fonctions de deux variables.

Soient donc $F(x, y)$ et $G(x, y)$ deux fonctions entières des variables x et y dont les coefficients fassent partie d'un domaine de rationalité $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}', \dots, \mathfrak{H}^{(v)})$. Si $F(x, y)$ et $G(x, y)$ ont un diviseur commun $H(x, y)$ et si $F(x, y) = H(x, y)\phi(x, y)$; $G(x, y) = H(x, y)\psi(x, y)$ nous pouvons remplacer le système $[F(x, y), G(x, y)]$ par le produit équivalent $H(x, y)[\phi(x, y), \psi(x, y)]$. Nous savons former le plus grand commun diviseur de deux fonctions entières: si donc $H(x, y)$ désigne le plus grand commun diviseur des deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$, il ne nous reste plus qu'à décomposer un système dont les deux éléments n'ont aucun diviseur commun.

Remarquons que les systèmes (ξ, η) communs à $F(x, y) = 0$ et $G(x, y) = 0$, sont d'abord ceux pour lesquels la fonction $H(x, y)$ s'annule; ils forment une variété d'ordre un; ce sont ensuite ceux qui annulent à la fois $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$; ils sont isolés. En déterminant le facteur $H(x, y)$ du système $[F(x, y), G(x, y)]$ nous avons donc déterminé la variété d'ordre un, commune aux deux fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ égalées à zéro; pour parvenir à une nouvelle décomposition du système considéré, il est donc naturel de commencer par chercher les systèmes isolés (ξ, η) communs aux deux fonctions $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ égalées à zéro. Je montrerai à la fin de ce paragraphe qu'en trouvant ces systèmes isolés on obtient vraiment une décomposition du système $[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ en systèmes plus simples.

La première partie de cette recherche n'est pas nouvelle. Mais il me semble nécessaire de la donner ici en insistant sur les points susceptibles de généralisation afin de bien faire comprendre sur quoi repose la solution du problème dans le cas général que j'exposerai plus loin. Comme c'est ce cas général qui est l'objet de nos recherches, je laisserai, à dessein, de côté, tout ce qui ne s'y rapporte pas directement.

Pour trouver les solutions communes aux deux équations $\phi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ nous chercherons à transformer le système $(\phi = 0, \psi = 0)$ en un système entièrement équivalent ne contenant qu'une seule équation. S'il est possible d'effectuer cette transformation, le problème ne présentera

plus aucune difficulté, à condition que nous supposions connu le théorème de GAUSS sur la séparation des racines d'une équation algébrique.

Le problème ainsi posé, on est directement amené à reprendre les recherches que j'ai exposées, dans le chapitre premier de ce Mémoire, sur le résultant de deux fonctions entières. Comme, pour des valeurs indéterminées de y , $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ n'ont pas de diviseur commun, on sait que l'on peut trouver des fonctions entières de x et de y , ϕ_1 et ψ_1 , vérifiant l'égalité

$$\phi(x, y)\psi_1(x, y) + \psi(x, y)\phi_1(x, y) = R_1(y),$$

dans laquelle le résultant $R_1(y)$ est une fonction entière de y qui n'a aucun diviseur commun avec ϕ_1 et ψ_1 et qui n'est pas identiquement nul en y .

Lorsque les coefficients des plus hautes puissances de x , dans ϕ et ψ ne dépendent pas de y , j'ai démontré que l'égalité $R_1(y) = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux fonctions ϕ et ψ aient un diviseur commun en x . Il n'en est pas de même lorsque, dans ϕ ou ψ , le coefficient de la plus haute puissance de x dépend de y ; en effet, pour des valeurs particulières données à y , le degré de $\psi(x, y)$ par exemple, par rapport à x , peut alors s'abaisser d'une unité; si donc $R_1(y) = 0$, c'est à dire, si

$$\phi(x)\psi_1(x) + \psi(x)\phi_1(x) = 0$$

on ne peut plus, en supposant l'existence des racines, conclure immédiatement que $\phi(x)$ et $\psi(x)$ ont un diviseur commun; car la relation

$$\psi_1(x) \equiv 0 \pmod{\psi(x)}$$

qui était impossible dans le cas où le coefficient de la plus haute puissance de x , dans $\psi(x)$ ne dépendait pas de y , est possible maintenant.

Ainsi pour pouvoir appliquer à des fonctions de deux variables le théorème fondamental sur leur résultant, il nous faut tout d'abord transformer ces fonctions en d'autres qui leur soient équivalentes et dont le degré par rapport à chacune des variables soit égal à la dimension.

Une simple transformation linéaire nous fournit ce résultat. Soit λ la dimension de $\phi(x, y)$ et μ celle de $\psi(x, y)$. Désignons par $\varphi_0(x, y)$ l'ensemble des termes de $\phi(x, y)$ qui sont de dimension λ , et par

$\phi_0(x, y)$ l'ensemble des termes de $\Psi(x, y)$ qui sont de dimension μ . Si nous posons

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y',$$

comme une substitution linéaire des variables ne change pas la dimension d'une fonction de ces variables, les termes de plus haute dimension en x' et y' seront, après la substitution,

$$\varphi_0(\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y') = \varphi_0(\alpha, \gamma) x'^{\lambda} + \varphi_0(\beta, \delta) y'^{\lambda} + \dots$$

et

$$\psi_0(\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y') = \psi_0(\alpha, \gamma) x'^{\mu} + \psi_0(\beta, \delta) y'^{\mu} + \dots$$

Il suffit donc de choisir les systèmes de nombres (α, γ) et (β, δ) tels que φ_0 et ψ_0 soient différents de zéro lorsqu'on y remplace (x, y) par l'un et l'autre de ces systèmes, pour avoir transformé $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ en deux fonctions de x' et de y' dont le degré par rapport à chacune des variables est respectivement égal à λ et à μ . Ces fonctions égalées à zéro sont entièrement équivalentes à $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$. Ce n'est donc pas une restriction que de supposer que $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont déjà les fonctions transformées. Dans cette hypothèse nous pouvons appliquer le théorème fondamental sur le résultant de deux fonctions entières.

Formons d'abord le résultant, par rapport à x , des deux fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$; soit

$$R_1(y) = \prod_{(k)} (y - y_k)$$

ce résultant. Les deux fonctions de x ,

$$\Phi(x, y_k), \quad \Psi(x, y_k)$$

ont, d'après ce que nous avons démontré, un diviseur commun; il y aura donc sûrement pour $y = y_k$, une valeur de x , $x = \xi$, pour laquelle les deux fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ s'annuleront simultanément. Inversement, si pour une valeur particulière de y , $y = \eta$, on peut trouver une valeur de x , $x = \xi$, telle que les deux égalités

$$\Phi(\xi, \eta) = 0, \quad \Psi(\xi, \eta) = 0$$

soient vérifiées simultanément, $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ ont, pour $y = \eta$, un diviseur commun; le résultant de ces deux fonctions, par rapport à x , $R_1(y)$, s'annule donc pour $y = \eta$, ce qui montre que η est nécessairement égale à l'une des racines y_k de l'équation $R_1(y) = 0$.

Formons ensuite le résultant, par rapport à y , des deux fonctions $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$; soit

$$R_2(x) = \prod_{(i)} (x - x_i)$$

ce résultant. Comme $R_2(x) = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$, considérées comme des fonctions de y , aient un diviseur commun, il y aura sûrement, pour $x = x_k$, une valeur de y , $y = \eta$, pour laquelle $\phi(x_k, y)$ et $\psi(x_k, y)$ s'annuleront simultanément; et si pour $x = \xi$ on peut trouver une valeur de y , $y = \eta$, telle que les deux égalités

$$\phi(\xi, \eta) = 0, \quad \psi(\xi, \eta) = 0$$

soient vérifiées simultanément, ξ sera nécessairement égale à l'une des racines x_k de l'équation $R_2(x) = 0$.

Le théorème fondamental sur le résultant de deux fonctions entières, appliqué aux deux fonctions $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ nous montre donc que les systèmes (ξ, η) pour lesquels on a simultanément

$$\phi(\xi, \eta) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\xi, \eta) = 0$$

sont tous compris parmi ceux que l'on peut former à l'aide des racines des deux équations

$$R_1(y) = 0 \quad \text{et} \quad R_2(x) = 0.$$

Mais nous ne voyons pas encore comment se groupent les racines de ces deux équations, pour former les systèmes (ξ, η) . C'est pourquoi nous introduisons dans nos recherches une quantité *indéterminée* u .

Posons

$$z = ux + y$$

ou encore, pour conserver la symétrie entre x et y

$$z = ux + vy; \quad v = 1$$

et

$$\phi(x, z - ux) = \varphi(x, z, u)$$

$$\Psi(x, z - ux) = \psi(x, z, u).$$

Dans les deux fonctions de x et de z , φ et ψ , le coefficient de la plus haute puissance de z , ne dépend, comme dans ϕ et Ψ , que des éléments du domaine de rationalité, et le coefficient de la plus haute puissance de x que de ces mêmes éléments et de l'indéterminée u ; ils ne peuvent donc jamais s'annuler pour des valeurs particulières données aux variables x ou z , ce qui nous permet d'appliquer au système

$$\varphi(x, z, u) = 0, \quad \psi(x, z, u) = 0$$

le même raisonnement que tout à l'heure. Formons donc le résultant, par rapport à x des deux fonctions φ et ψ , et désignons par

$$R(z, u) = c \prod_{(i)} (z - \zeta_i)$$

ce résultant, divisé, s'il y a lieu, par une fonction entière de u , afin que le coefficient de la plus haute puissance de z ne dépende plus que des éléments du domaine de rationalité. Nous pouvons alors toujours déterminer une valeur de x , $x = \xi'$, telle que

$$\varphi(\xi', \zeta_k) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\xi', \zeta_k) = 0.$$

Comme inversement, toutes les valeurs de z pour lesquelles φ et ψ s'annulent simultanément, sont racines de l'équation $R(z) = 0$, nous voyons également que

$$x = \xi' \quad \text{et} \quad u\xi' + vy = \zeta_k$$

représentent *tous* les systèmes vérifiant les deux équations

$$\varphi(x, ux + vy) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, ux + vy) = 0$$

ou encore que

$$x = \xi' \quad \text{et} \quad y = \zeta_k - u\xi'$$

représentent *tous* les systèmes vérifiant les deux équations

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x, y) = 0.$$

Mais nous avons vu tout à l'heure que tous ces systèmes sont compris parmi les combinaisons des racines ξ_k et η_k de $R_2(x) = 0$ et de $R_1(y) = 0$.
Donc

$$\xi' = \xi_k \quad \text{et} \quad \zeta - u\xi' = \eta_k$$

c'est à dire

$$\zeta = u\xi_k + v\eta_k.$$

Ainsi chaque racine du résultant $R(z)$ égalé à zéro est une fonction linéaire et homogène des racines des résultants des deux fonctions considérées, par rapport à x et à y , et nous pouvons écrire

$$R(z) = \prod_{(k)} (z - u\xi_k - v\eta_k).$$

L'équation $R(z) = 0$ est entièrement équivalente au système

$$[\phi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0]$$

car à tout système vérifiant simultanément les deux équations $\phi = 0$ et $\psi = 0$ correspond une racine de l'équation $R(z) = 0$, et inversement à toute racine $u\xi_k + v\eta_k$ de l'équation $R(z) = 0$, correspond un système (ξ_k, η_k) tel que

$$\phi(\xi_k, \eta_k) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\xi_k, \eta_k) = 0.$$

C'est pourquoi nous dirons que $R(z) = 0$ est l'équation résolvante et $R(z)$ le résolvant du système $[\phi(x, y), \psi(x, y)]$.

Comme

$$R(z) = \prod_{(k)} (z - u\xi_k - v\eta_k) = \prod_{(k)} [u(x - \xi_k) + v(y - \eta_k)]$$

il suffit, pour obtenir les systèmes cherchés (ξ_k, η_k) de décomposer la fonction homogène de u et de v , $R(ux + vy)$ en ses facteurs linéaires,

$$u(x - \xi_k) + v(y - \eta_k).$$

Chacun de ces facteurs linéaires, égalé à zéro, nous donne un des systèmes cherchés; car u étant indéterminée, de l'égalité

$$u(x - \xi_k) + v(y - \eta_k) = 0$$

on déduit

$$x = \xi_k; \quad y = \eta_k.$$

La différence essentielle entre R et la fonction V de GALOIS consiste en ce que dans R , u désigne une indéterminée, tandis que dans V , u et v sont remplacés par des nombres entiers. Cette différence est très-importante, comme nous nous en apercevrons peu à peu dans la suite de nos recherches.

Dès maintenant nous voyons que la méthode précédente a l'avantage de nous donner *simultanément* les deux éléments ξ , η d'un même système, et c'est à l'emploi de l'indéterminée u que nous devons ce résultat.

Poisson fait déjà usage des indéterminées et obtient le même résultat; mais là s'arrête l'analogie de sa méthode et de celle de M. KRONECKER. Il me semble que POISSON considère les indéterminées plutôt comme des auxiliaires commodes pour le *calcul*, tandis que M. KRONECKER s'en sert surtout pour pénétrer plus avant dans la nature des systèmes vérifiant les équations données. Déjà la recherche sur la décomposition des systèmes que nous allons aborder à l'instant, indiquera clairement l'importance théorique des indéterminées en Algèbre.

L'équivalence

$$[\Phi(x, y) = 0, \quad \Psi(x, y) = 0] \sim [R(z) = 0]$$

suppose expressément u indéterminée. Mais si, faisant pour un instant abstraction de cette équivalence, nous nous proposons simplement de trouver les systèmes (ξ, η) vérifiant à la fois les deux équations

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x, y) = 0$$

il nous suffira de remplacer u et v par des quantités variables, et alors nous pourrons toujours, comme nous l'avons fait voir dans le second chapitre de ce Mémoire, donner à ces variables des valeurs a et b , telles que ξ et η soient fonctions rationnelles de $a\xi + b\eta$. A la recherche des deux genres ξ et η est alors substituée, comme chez GALOIS, celle du genre unique qui les contient tous deux. Nous rencontrons ici le genre de la méthode qui permet de donner une figuration bien simple d'un système d'équations à un nombre quelconque d'inconnues.

2. Nous venons de parler de l'équivalence des systèmes d'équations $[\Phi(x, y) = 0, \quad \Psi(x, y) = 0]$ et $[R(z) = 0]$, équivalence qui est le théorème fondamental de la théorie de l'élimination, dans le cas de deux fonctions

de deux variables. Il nous faut maintenant rechercher si à cette équivalence correspond une équivalence entre le système

$$[\Phi(x, y), \Psi(x, y)],$$

qui est à proprement parler l'objet de nos recherches, et son résolvant $R(ux + vy)$, et si cette équivalence répond à la définition algébrique que j'ai donnée dans le chapitre précédent, où deux systèmes étaient dits équivalents lorsque chacun d'eux contenait l'autre dans le sens plus général de contenant et de contenu introduit en Algèbre par M. KRONECKER.

Comme l'équation $R(ux + vy) = 0$ n'est la résolvante du système donné que si u est indéterminée, elle représente non pas une équation entre x et y , mais plusieurs. Si, en effet,

$$R(ux + y) = \sum_{k=0}^m r_k(x, y)u^k$$

nous aurons à la fois, précisément parce que u est indéterminée,

$$r_0(x, y) = 0, r_1(x, y) = 0, \dots, r_m(x, y) = 0$$

et le nombre de ces équations peut être fort grand. C'est ce système d'équations qui, en réalité, est équivalent au système

$$[\Phi(x, y) = 0, \Psi(x, y) = 0];$$

nous l'avons seulement condensé en une seule équation, à l'aide de l'indéterminée u , afin d'obtenir simultanément les valeurs correspondantes ξ et η ; mais dans des recherches d'équivalences il nous faut revenir aux équations qui lient les variables x et y indépendamment de l'indéterminée u ; nous comparerons donc les deux systèmes

$$[\Phi(x, y), \Psi(x, y)] \quad \text{et} \quad [r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)].$$

Le résultant $R(z)$ est une fonction linéaire et homogène des deux fonctions $\varphi(x, z)$ et $\psi(x, z)$, c'est à dire des deux fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ et les coefficients de cette fonction linéaire et homogène sont des fonctions entières de x et de z . Ils sont seulement rationnels en u ; mais après avoir multiplié par une fonction entière convenable de u , l'expression $R(z)$ et la fonction linéaire et homogène qui la représente, on peut com-

parer les coefficients des puissances correspondantes de u ; on obtient alors, pour $k = 0, 1, 2, \dots, m$,

$$r_k(x, y) \equiv 0 \pmod{\Phi(x, y), \Psi(x, y)}$$

ce qui démontre la congruence

$$[r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)] \equiv 0 \pmod{\Phi(x, y), \Psi(x, y)}.$$

Ainsi le système donné est contenu dans le système des coefficients du résolvant. Il s'agit maintenant de vérifier si, inversement, le système des coefficients du résolvant est contenu dans le système donné.

Une restriction est ici nécessaire. Nous savons que la fonction $\Phi(x, y)$ s'annule pour les systèmes (ξ, η) vérifiant simultanément les équations $r_0(x, y) = 0, r_1(x, y) = 0, \dots, r_m(x, y) = 0$. Ce que nous voulons démontrer revient donc à généraliser la proposition élémentaire qu'une fonction $\Phi(x)$ qui s'annule pour toutes les racines d'une équation $r(x) = 0$, est divisible par $r(x)$. Mais cette proposition élémentaire suppose déjà que toutes les racines de l'équation $r(x) = 0$ soient inégales; il est donc naturel de faire la même restriction dans le cas des fonctions de deux variables et de supposer que tous les systèmes (ξ, η) soient inégaux, c'est à dire que l'équation résolvante $R(z) = 0$ n'ait point de racines multiples.

C'est seulement sous cette hypothèse que je résoudrai complètement le problème proposé. Elle revient à supposer l'inégalité

$$\prod_{(i)} \Delta(\xi_i, \eta_i) \geq 0,$$

où $\Delta(x, y)$ désigne le déterminant fonctionnel des deux fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$, et où le produit est étendu à tous les systèmes (ξ, η) communs à ces deux fonctions; mais comme dans ce qui va suivre je ne fais pas usage de ce théorème, j'en renverrai la démonstration à une autre occasion.

Je démontrerai, par contre, par une méthode qui sera applicable à un système de fonctions contenant un nombre quelconque de variables, que toutes les fonctions

$$r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)$$

n'ont pas de diviseur commun. Je formerai, à cet effet, les deux expressions

$$H(x, y) = \sum_{k=0}^m r_k(x, y) U_k \quad \text{et} \quad K(x, y) = \sum_{k=0}^m r_k(x, y) V_k$$

où U_0, U_1, \dots, U_m et V_0, V_1, \dots, V_m sont de nouvelles indéterminées et je montrerai d'abord que de l'hypothèse que nous venons de faire on déduit l'inégalité

$$\prod_{(i)} I(\xi_i, \eta_i) \geq 0$$

où $I(x, y)$ désigne le déterminant fonctionnel des deux fonctions $H(x, y)$ et $K(x, y)$ et où le produit est étendu à toutes les racines du résolvant $R(z)$ égal à zéro.

Dans ce but, il suffit de remarquer qu'en désignant par u et u_1 deux indéterminées différentes, les fonctions

$$H(x, y) = \sum_{(k)} r_k(x, y) U_k \quad \text{et} \quad K(x, y) = \sum_{(k)} r_k(x, y) V_k$$

se transforment en

$$R(ux + y) = \sum_{(k)} r_k(x, y) u^k \quad \text{et} \quad R(u_1x + y) = \sum_{(k)} r_k(x, y) u_1^k$$

par une substitution qui spécialise les indéterminées U et V .

Si donc le déterminant fonctionnel

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} D_x H(x, y), & D_y H(x, y) \\ D_x K(x, y), & D_y K(x, y) \end{vmatrix}$$

était nul, pour un des systèmes (ξ, η) considérés, il faudrait que pour ce même système, le déterminant

$$\begin{vmatrix} D_x R(ux + y), & D_y R(ux + y) \\ D_x R(u_1x + y), & D_y R(u_1x + y) \end{vmatrix}$$

fût également nul. Mais, si $z_1 = u_1x + y$,

$$D_x R(ux + y) = u D_z R(z); \quad D_y R(ux + y) = D_z R(z)$$

$$D_x R(u_1x + y) = u_1 D_{z_1} R(z_1); \quad D_y R(u_1x + y) = D_{z_1} R(z_1).$$

Nous aurions donc aussi l'égalité

$$(u - u_1) D_z R(z) D_{z_1} R(z_1) = 0$$

c'est à dire, ou bien $D_z R(z) = 0$, ou bien $D_{z_1} R(z_1) = 0$, pour un système (ξ, η) qui annule le résolvant $R(z)$ et pour lequel nous avons à la fois $R(ux + y) = 0$ et $R(u_1x + y) = 0$. Ce résultat est contraire à l'hypothèse d'après laquelle $R(z)$ n'a point de facteurs multiples. Il est donc impossible que le produit

$$\prod_{(i)} I(\xi_i, \eta_i)$$

soit nul.

Mais alors il est également impossible que toutes les fonctions $r_0(x, y)$, $r_1(x, y)$, ..., $r_m(x, y)$ aient un diviseur commun; car si elles avaient un diviseur commun $P(x, y)$, $P(x, y)$ serait aussi diviseur de $H(x, y)$ et de $K(x, y)$; les deux fonctions $H(x, y)$ et $K(x, y)$ s'annuleraient donc pour l'un des systèmes (ξ, η) , et nous aurions pour ce système

$$I(\xi, \eta) = 0$$

contrairement à ce que je viens de démontrer.

D'autre part, comme par hypothèse le résolvant $R(z)$ n'a pas de facteurs multiples et que $D_x R(ux + y) = u D_z R(z)$, les deux fonctions

$$\sum_{(k)} r_k(x, y) u^k \quad \text{et} \quad \sum_{(k)} D_x r_k(x, y) u^k$$

n'ont pas de diviseur commun, pour des valeurs indéterminées de y . On voit donc que $K(x, y)$ et sa dérivée par rapport à x ne peuvent avoir de diviseur commun tant que y reste indéterminée.

Ainsi de l'hypothèse que $R(z)$ n'a pas de facteurs multiples, résultent les deux équivalences

$$[H(x, y), K(x, y)] \sim 1$$

et

$$[K(x, y), D_x K(x, y)] \sim 1$$

relativement à x , pour y indéterminée.

Ceci posé, je vais chercher à vérifier la congruence

$$\Phi(x, y) \equiv 0 \pmod{r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)}.$$

A cet effet il est nécessaire de déterminer des multiplicateurs $q_0(x, y)$, $q_1(x, y)$, \dots , $q_m(x, y)$, fonctions *entières* de x et de y , et tels que $\Phi(x, y)$ soit égal à

$$q_0(x, y)r_0(x, y) + q_1(x, y)r_1(x, y) + \dots + q_m(x, y)r_m(x, y).$$

Ce problème serait résolu si nous pouvions déterminer des fonctions *entières* de x et de y , $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ telles que

$$\Phi(x, y) = \alpha(x, y)H(x, y) + \beta(x, y)K(x, y)$$

c'est à dire, si nous pouvions déterminer une seule fonction *entière* de x et de y , $\alpha(x, y)$, telle que

$$\Phi(x, y) \equiv \alpha(x, y)H(x, y) \pmod{K(x, y)}.$$

La formule de LAGRANGE nous donne immédiatement une fonction rationnelle de x et de y , entière en x ,

$$\alpha(x, y) = \sum_{(i)} \frac{\Phi(x_i, y)}{H(x_i, y)} \frac{K(x, y)}{x - x_i} \frac{1}{D_x K(x, y)_{x=x_i}}$$

vérifiant cette congruence; la somme est étendue à toutes les racines x_i du polynôme $K(x, y)$ considéré comme une fonction de x seulement et égal à zéro. Si la fonction rationnelle $\alpha(x, y)$ est aussi *entière* en y , le problème est résolu; il s'agit donc simplement de voir quand cette expression se présente sous une forme illusoire. Dans ce but nous rechercherons les valeurs des variables qui annulent son dénominateur.

Et d'abord les deux dernières équivalences nous montrent que pour y indéterminée, $H(x_i, y)$ et $D_x K(x, y)_{x=x_i}$ sont nécessairement différents de zéro.

De plus, si nous donnons à y , une valeur y_0 indépendante des indéterminées U et V , et telle que $H(x_i, y_0)$ soit nulle, nous aurons à la fois

$$H(x_i, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad K(x_i, y_0) = 0.$$

Mais alors le système (x_i, y_i) annule simultanément toutes les fonctions $r_h(x, y)$, ($h = 0, 1, \dots, m$); il est donc identique à l'un des systèmes (ξ, η) considérés, et comme pour chacun de ces systèmes on a $\phi(\xi, \eta) = 0$, notre expression se présente sous une forme indéterminée. En tenant compte de l'égalité $K(x_i, y) = 0$, on trouve facilement, par le procédé bien connu de différentiation du numérateur et du dénominateur, la vraie valeur de la fraction $\frac{\phi(\xi_i, \eta_i)}{H(\xi_i, \eta_i)}$. Elle est égale à

$$\left[\frac{D_y \phi(x, y) D_x K(x, y) - D_x \phi(x, y) D_y K(x, y)}{D_y H(x, y) D_x K(x, y) - D_x H(x, y) D_y K(x, y)} \right]_{x=\xi_i, y=\eta_i}.$$

Le dénominateur est égal, au signe près, à $I'(\xi_i, \eta_i)$; il est donc différent de zéro et la vraie valeur de la fraction

$$\frac{\phi(\xi_i, \eta_i)}{H(\xi_i, \eta_i)}$$

est finie et déterminée.

Si donc, en s'annulant, la fonction de y ,

$$T(y, U, V) = \prod_{(h)} H(x_h, y)$$

rend illusoire l'expression du multiplicateur $\alpha(x, y)$ donnée par la formule de LAGRANGE, ce ne peut être que pour des valeurs de y qui dépendent des indéterminées U et V . En d'autres termes, si nous déterminons le plus grand commun diviseur $A(y)$ des coefficients de la fonction $T(y, U, V)$ ordonnée par rapport aux indéterminées U et V , et que nous mettions $T(y, U, V)$ sous la forme

$$T(y, U, V) = A(y) E_1(y, U, V)$$

les racines de l'équation $A(y) = 0$ ne rendront pas infinie l'expression trouvée pour $\alpha(x, y)$.

Je rappelle qu'on entend par *forme primitive* d'un nombre quelconque d'indéterminées, une fonction entière de ces indéterminées dont les coefficients n'ont aucun diviseur commun. $E_1(y, U, V)$ est donc une forme primitive des indéterminées U et V .

Il serait possible que pour une valeur déterminée de y , indépendante des indéterminées U et V , $y = y_1$, la fonction $K(x, y)$ et sa dérivée par rapport à x , aient un diviseur commun. L'expression trouvée pour $\alpha(x, y)$ se présenterait alors, pour $y = y_1$, sous une forme illusoire. Mais je vais montrer que si W désigne une indéterminée, il est impossible que la fonction

$$K(x, y_1) + WH(x, y_1)$$

et sa dérivée par rapport à x , aient un diviseur commun.

Et d'abord les deux fonctions de x , $H(x, y_1)$ et $K(x, y_1)$ ne peuvent avoir de diviseur commun. En effet, si la fonction $P(x, y_1)$ divisait à la fois $H(x, y_1)$ et $K(x, y_1)$ elle diviserait aussi $I'(x, y_1)$. Mais alors en déterminant x_1 par l'égalité $P(x_1, y_1) = 0$, nous aurions à la fois

$$H(x_1, y_1) = 0, \quad K(x_1, y_1) = 0, \quad I'(x_1, y_1) = 0$$

ce qui est impossible, puisque des deux premières de ces égalités nous pouvons conclure que le système (x_1, y_1) est égal à l'un des systèmes (ξ, η) , à condition toutefois que nous ne considérons que des valeurs y_1 indépendantes des indéterminées U et V .

Ceci posé, supposons que la fonction $K(x, y_1) + WH(x, y_1)$ et sa dérivée par rapport à x aient un diviseur commun, $L(x, y_1, W)$. Des deux égalités

$$K(x, y_1) + WH(x, y_1) = L(x, y_1, W)M(x, y_1, W)$$

et

$$D_x K(x, y_1) + WD_x H(x, y_1) = L(x, y_1, W)N(x, y_1, W)$$

on déduit immédiatement la relation

$$\begin{aligned} & K(x, y_1)D_x H(x, y_1) - H(x, y_1)D_x K(x, y_1) \\ &= L(x, y_1, W)[M(x, y_1, W)D_x H(x, y_1) - N(x, y_1, W)D_x K(x, y_1)] \end{aligned}$$

dans laquelle la quantité entre parenthèses est différente de zéro. En effet, dans le cas contraire le terme de gauche serait égal à zéro, donc les deux fonctions de x , $H(x, y_1)$ et $K(x, y_1)$, auraient un diviseur commun, contrairement à ce que nous venons de démontrer. Mais alors, nous

pouvons déduire de l'égalité précédente que la fonction $L(x, y, W)$ est nécessairement contenue dans l'expression

$$K(x, y_1) D_x H(x, y_1) - H(x, y_1) D_x K(x, y_1);$$

elle est, par suite, indépendante de l'indéterminée W ; donc, comme $K + WH = L.M$, elle est contenue à la fois dans $H(x, y_1)$ et dans $K(x, y_1)$. Mais nous avons vu plus haut que ces deux fonctions n'ont pas de diviseur commun; donc la fonction $K(x, y_1) + WH(x, y_1)$ et sa dérivée, par rapport à x , sont premières entre elles.

En appliquant aux deux fonctions de x ,

$$K(x, y_1) + WH(x, y_1) \quad \text{et} \quad D_x K(x, y_1) + WD_x H(x, y_1)$$

le théorème fondamental sur le résultant de deux fonctions entières, on voit maintenant qu'il est possible de déterminer une constante C , telle que la fonction

$$K(x, y) + CH(x, y)$$

n'ait également aucun diviseur commun avec sa dérivée par rapport à x .

D'ailleurs les deux systèmes

$$[H(x, y), K(x, y)] \quad \text{et} \quad [H(x, y), K(x, y) + CH(x, y)]$$

sont entièrement équivalents.

Ainsi, après avoir transformé, si cela est nécessaire, le système proposé en un système équivalent convenable, en désignant encore par $H(x, y)$ et $K(x, y)$ les deux éléments de ce système, et par y_1 une valeur déterminée indépendante des indéterminées U et V , nous ne pouvons avoir simultanément les deux équations

$$K(x_k, y_1) = 0 \quad \text{et} \quad D_x K(x, y_1)_{x=x_k} = 0.$$

Comme la première de ces égalités est vérifiée, quelle que soit y , la seconde ne l'est jamais. En d'autres termes, le produit

$$\prod_{(i)} D_x K(x, y)_{x=x_k} = T_1(y, U, V)$$

est une forme primitive des indéterminées U et V .

En multipliant la fonction entière de x , $\alpha(x, y)$ par le produit $E(y, U, V)$ des deux formes primitives $E_1(y, U, V)$ et $T_1(y, U, V)$, nous obtenons donc une fonction *entière de x et de y* . Comme le produit de deux formes primitives est lui-même une forme primitive, la forme $E(y, U, V)$ est primitive.

Nous avons jusqu'ici, à l'aide de la formule de LAGRANGE, déterminé $\alpha(x, y)$ de manière que la fonction entière de x et de y ainsi que des indéterminées U et V

$$E(y)[\Phi(x, y) - \alpha(x, y)H(x, y)]$$

soit divisible par $K(x, y)$, considérée comme une fonction de x seulement; le quotient

$$\beta(x, y) = \frac{E(y)[\Phi(x, y) - \alpha(x, y)H(x, y)]}{K(x, y)}$$

est donc une fonction entière de x . Mais nous avons démontré que si le quotient de deux fonctions entières de plusieurs variables x, y, z, \dots , est une fonction entière de x et si la fonction diviseur ne contient pas un facteur indépendant de x , ce même quotient est fonction entière de *toutes* les variables x, y, z, \dots . La fonction entière $K(x, y)$ ne contient manifestement aucun facteur indépendant de x ; donc $\beta(x, y)$ est une fonction entière de x et de y , ainsi que des indéterminées U et V , et nous pouvons écrire

$$E(y)\Phi(x, y) = [E(y)\alpha(x, y)]H(x, y) + \beta(x, y)K(x, y)$$

les coefficients de $H(x, y)$ et de $K(x, y)$ étant fonctions entières de x , de y et des indéterminées U et V .

Nous avons donc démontré, non pas que la fonction $\Phi(x, y)$ contient le système de modules

$$[H(x, y), K(x, y)],$$

mais seulement que le produit

$$E(y)\Phi(x, y)$$

de la fonction $\Phi(x, y)$ et d'une forme primitive $E(y)$, contient ce système de modules. Mais comme dans la forme primitive $E(y)$ ne paraît qu'une variable y , tout est bien simple maintenant.

En ordonnant par rapport aux indéterminées U et V les deux termes de l'égalité

$$E(y)\Phi(x, y) = E(y)\alpha(x, y)H(x, y) + \beta(x, y)K(x, y)$$

et en comparant les coefficients, nous obtenons un système d'équations

$$S^{(k)}(y)\Phi(x, y) = r_0(x, y)s_0^{(k)}(x, y) + r_1(x, y)s_1^{(k)}(x, y) + \dots + r_m(x, y)s_m^{(k)}(x, y)$$

pour $k = 1; 2, 3, \dots$. Comme la variable x ne paraît pas dans la forme $E(y)$, chacune des fonctions $S^{(k)}(y)$ ne contient qu'une seule variable; ces fonctions $S^{(k)}(y)$ n'ont d'ailleurs pas de diviseur commun puisque la forme $E(y)$ est *primitive*; nous pouvons donc déterminer des fonctions entières à coefficients rationnels $\sigma_k(y)$, telles que l'égalité

$$\sum_{(k)} \sigma_k(y) S^{(k)}(y) = 1$$

soit vérifiée. En multipliant chacune des équations précédentes par la fonction $\sigma_k(y)$ correspondante et en ajoutant les différentes équations ainsi obtenues nous avons donc enfin

$$\Phi(x, y) \equiv 0 \pmod{r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)}.$$

L'on obtient, tout à fait de même, la seconde congruence

$$\Psi(x, y) \equiv 0 \pmod{r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)}.$$

Mais alors on peut écrire

$$[\Phi(x, y), \Psi(x, y)] \equiv 0 \pmod{r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)}.$$

Il suffit de joindre à ce résultat, celui que nous avons obtenu plus haut, pour avoir démontré l'équivalence

$$[\Phi(x, y), \Psi(x, y)] \sim [r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)].$$

L'équivalence d'un système de deux fonctions de deux variables et du système formé à l'aide des coefficients de son résolvant ordonné par rapport aux indéterminées qui y paraissent est donc bien de celles que nous avons définies dans le chapitre précédent.

Comme

$$R(ux + y) = \sum_{(k)} r_k(x, y) u^k$$

quelle que soit l'indéterminée u , nous pouvons en considérant successivement plusieurs indéterminées différentes u, u_1, \dots , représenter chacune des fonctions $r_k(x, y)$ par une fonction linéaire de $R(ux + y), R(u_1x + y), \dots$. Il est bon de remarquer que les coefficients de ces fonctions R sont, en général, fonctions *rationnelles* des indéterminées u, u_1, \dots . La fonction $R(ux + y)$ prise un certain nombre de fois et pour des indéterminées différentes, et le système $[r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)]$ sont donc équivalents. C'est pourquoi nous pouvons dire que l'équivalence démontrée

$$[\Phi(x, y), \Psi(x, y)] \sim [r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)]$$

indique aussi qu'à l'aide des indéterminées u , la fonction $R(z)$ remplace entièrement le système donné $[\Phi(x, y), \Psi(x, y)]$.

3. Il nous faut maintenant faire les mêmes recherches dans le cas où l'on nous donne non pas deux, mais un nombre quelconque de fonctions de deux variables. En introduisant la notion de système de diviseurs j'ai déjà insisté sur ce que le nombre d'éléments de ces systèmes ne jouait qu'un rôle secondaire dans l'étude de leurs propriétés. Pour légitimer cette remarque, j'ai de suite montré que l'on peut augmenter à volonté le nombre des éléments d'un système sans rien changer à sa signification. La méthode que je vais suivre pour transformer un système composé d'un nombre quelconque d'éléments et qui est toute semblable à celle que j'ai suivie lorsque le système n'était composé que de deux éléments seulement, vérifie entièrement cette remarque dans le cas de deux variables.

Soient $A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_\mu(x, y), \mu$ fonctions entières de x et de y , que nous pouvons supposer sans diviseur commun dans le domaine de rationalité considéré, puisque nous connaissons une méthode pour déterminer le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de fonctions entières dans un domaine général de rationalité. Nous cherchons s'il est possible de décomposer le système

$$[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_\mu(x, y)]$$

en systèmes plus simples. Relions, à cet effet, les éléments A_1, A_2, \dots, A_n par deux systèmes d'indéterminées U_1, U_2, \dots, U_n et V_1, V_2, \dots, V_n et formons le résolvant des deux fonctions

$$\sum_{i=1}^n U_i A_i(x, y) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n V_i A_i(x, y);$$

ce résolvant sera fonction entière de $z = ux + vy$ et des indéterminées U et V ; désignons-le par

$$S(z, U, V)$$

et soit $R(z)$ le plus grand commun diviseur des coefficients de S considérée comme une fonction des indéterminées U et V seulement; nous pourrons alors écrire

$$S(z, U, V) = R(z) E(z, U, V)$$

et $E(z, U, V)$ sera une forme primitive des indéterminées U et V .

Ceci posé, supposons que pour un système (ξ, η) , les fonctions $A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)$ s'annulent simultanément; alors les deux sommes

$$\sum_{(i)} U_i A_i(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \sum_{(i)} V_i A_i(\xi, \eta) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

seront également nulles, et nous aurons, par suite, d'après ce que nous avons démontré sur le résolvant de deux fonctions entières

$$S(u\xi + v\eta, U, V) = 0.$$

Mais, pour une valeur de z indépendante des indéterminées U et V , la fonction $S(z, U, V)$ ne peut s'annuler que si $R(z)$ s'annule. Si donc nous avons simultanément

$$A_1(\xi, \eta) = 0, A_2(\xi, \eta) = 0, \dots, A_n(\xi, \eta) = 0,$$

nous avons aussi

$$R(u\xi + v\eta) = 0.$$

Inversement, comme chaque racine $\xi = u\xi + v\eta$ de l'équation $R(z) = 0$

vérifie l'équation $S(z, U, V) = 0$, nous aurons à la fois, d'après ce que nous avons démontré sur le résolvant de deux fonctions entières,

$$\sum_{(i)} U_i A_i(x, y) = 0 \text{ et } \sum_{(i)} V_i A_i(x, y) = 0 \quad (i=1, 2, \dots)$$

pour $x = \xi$ et $y = \eta$; mais de ces deux équations résultent immédiatement les suivantes

$$A_1(\xi, \eta) = 0, A_2(\xi, \eta) = 0, \dots, A_n(\xi, \eta) = 0.$$

Ainsi la fonction $R(z)$ joue, dans le cas général que nous considérons, le même rôle que le résolvant dans le cas particulier de deux fonctions entières seulement. C'est pourquoi nous dirons que $R(z)$, le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme $S(z, U, V)$, est le *résolvant* du système

$$[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)].$$

Nous allons montrer que tout système est équivalent à son résolvant.

Et d'abord $R(z)$ contient le système $[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)]$. Nous obtenons, en effet, le résolvant $S(z, U, V)$ des deux fonctions entières

$$\sum_{(i)} U_i A_i(x, y) \text{ et } \sum_{(i)} V_i A_i(x, y) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

en formant le résultant, par rapport à x , des deux fonctions

$$\sum_{(i)} U_i A_i(x, z - ux) \text{ et } \sum_{(i)} V_i A_i(x, z - ux); \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

il en résulte que $S(z, U, V)$ est une fonction linéaire et homogène des deux fonctions entières de x , de y et des U, V .

$$\sum_{(i)} U_i A_i(x, y) \text{ et } \sum_{(i)} V_i A_i(x, y) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

dont les coefficients sont également fonctions entières de x , de y et des U, V . En ordonnant S , ainsi que cette fonction linéaire et homogène, par rapport aux indéterminées U et V , et en comparant les coefficients correspondants, nous aurons donc, si $S^{(k)}(z)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) sont les coefficients de la forme primitive $E(z, U, V)$, une suite de congruences

$$R(z) S^{(k)}(z) \equiv 0 \pmod{A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)}$$

pour $k = 1, 2, \dots, \tau$. Comme les fonctions $S^{(k)}(z)$ n'ont pas de diviseur commun et sont fonctions d'une seule variable, nous déduisons facilement de cette suite de congruences, celle que nous voulons démontrer

$$R(z) \equiv 0 \pmod{A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)}.$$

Après avoir, dans les deux termes de l'égalité correspondante, chassé le dénominateur qui est une fonction entière de u , il vient en comparant les coefficients des puissances correspondantes de u et en posant

$$R(z) = \sum_{(i)} r_i(x, y) u^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

$$r_i(x, y) \equiv 0 \pmod{A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} [r_0(x, y), r_1(x, y), r_2(x, y), \dots, r_m(x, y)] &\equiv 0 \\ &\pmod{A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)}. \end{aligned}$$

Cette dernière congruence ne contient plus aucune indéterminée.

Si, comme toujours, nous supposons que les racines du résolvant $R(z)$ ne soient pas multiples, chacun des éléments $A_i(x, y)$, ($i = 1, 2, \dots, \mu$) contient également le système $[r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)]$. Il suffit, pour s'en assurer, de démontrer que $A_i(x, y)$ contient le système

$$[\sum_{(i)} U_i r_i(x, y), \sum_{(i)} V_i r_i(x, y)]. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

Ici le raisonnement est identique à celui que nous avons fait pour démontrer la congruence

$$\Phi(x, y) \equiv 0 \pmod{H(x, y), K(x, y)}.$$

A l'aide de la formule de LAGRANGE, on forme d'abord une fonction entière $E(y)\alpha(x, y)$ vérifiant la congruence

$$E(y)A_j(x, y) \equiv E(y)\alpha(x, y) \sum_{(i)} U_i r_i(x, y) \pmod{\sum_{(i)} V_i r_i(x, y)}$$

où $E(y)$ désigne une forme primitive des indéterminées U et V , dont

les coefficients ne dépendent que d'une seule variable; puis on en déduit, comme tout à l'heure, la congruence que nous voulons démontrer

$$A_j(x, y) \equiv 0 \pmod{r_0(x, y), r_1(x, y), \dots, r_m(x, y)}$$

pour $j = 1, 2, \dots, \mu$.

En joignant ce résultat à celui que nous avons obtenu à l'instant, nous pouvons écrire l'équivalence

$$[A_1(x, y), \dots, A_n(x, y)] \sim [r_0(x, y), \dots, r_m(x, y)].$$

Cette équivalence indique aussi, qu'à l'aide des indéterminées u , la fonction $R(z)$ remplace entièrement le système donné

$$[A_1(x, y), \dots, A_n(x, y)].$$

Comme deux systèmes équivalents à un même troisième sont équivalents, nous avons ainsi démontré le théorème fondamental: *Tous les systèmes de fonctions entières de deux variables, ayant même résolvant, sont équivalents.*

Dans le chapitre précédent, une des raisons données pour légitimer l'introduction des systèmes de diviseurs en Algèbre, était que toute fonction $M(x, y)$ qui s'annule pour les systèmes de racines (ξ, η) communs à plusieurs fonctions $A_k(x, y)$, ($k = 1, 2, \dots$) de deux variables, sans diviseur commun, est une fonction homogène et linéaire de $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$, \dots , à coefficients fonctions entières de x et de y . Nous pouvons maintenant considérer ce théorème comme démontré. Il faut toutefois que le résolvant $R(z)$ des fonctions $A_k(x, y)$ ne contienne pas de facteurs multiples; la démonstration de la congruence

$$M(x, y) \equiv 0 \pmod{r_0(x, y), \dots, r_m(x, y)}$$

de laquelle on déduit, d'après ce que nous venons de voir,

$$M(x, y) \equiv \sigma \pmod{A_1(x, y), \dots, A_n(x, y)}$$

repose, en effet, sur cette hypothèse. En cherchant à déterminer directement deux fonctions entières $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$, vérifiant l'égalité

$$M(x, y) = \alpha(x, y) \sum_{(i)} U_i A_i(x, y) + \beta(x, y) \sum_{(i)} V_i A_i(x, y)$$

on voit cependant que, même si les systèmes (ξ_i, η_i) sont multiples, on peut encore vérifier la congruence cherchée lorsque la fonction $M(x, y)$ s'annule pour chaque $x = \xi_i$ et $y = \eta_i$, au moins autant de fois que le résolvant $R(ux + vy)$.

4. Je dis enfin que la transformation du système

$$[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)]$$

en une seule fonction $R(z)$ contenant l'indéterminée u , nous donne vraiment une *décomposition*, en systèmes plus simples, du système $[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)]$ dont les éléments n'ont aucun diviseur commun.

Pour nous en assurer, décomposons dans un domaine de rationalité que nous fixerons arbitrairement, le polynôme $R(z)$ en deux facteurs $F(z)$ et $G(z)$ de sorte que

$$R(z) = F(z)G(z)$$

et supposons que

$$F(z) = \sum_{(i)} f_i(x, y) u^i \quad (i=0, 1, 2, \dots, m)$$

$$G(z) = \sum_{(i)} g_i(x, y) u^i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

Si, à la décomposition de $R(z)$ en deux facteurs, correspond vraiment une *décomposition du système donné en deux systèmes plus simples*, il faut que réciproquement en *composant* de nouveau ces deux systèmes on obtienne un système équivalent au système donné. Or le produit de la composition des deux systèmes $[f_0(x, y), f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)]$ et $[g_0(x, y), g_1(x, y), \dots, g_n(x, y)]$ est équivalent au système dont les éléments sont des produits de chaque élément du premier système par chaque élément du second, c'est à dire au système

$$[f_0(x, y)g_0(x, y), \dots, f_0(x, y)g_n(x, y), f_1(x, y)g_0(x, y), \dots, f_m(x, y)g_n(x, y)].$$

Les éléments de ce système composé ne peuvent être nuls simultanément que si, ou bien $f_0(x, y) = 0, f_1(x, y) = 0, \dots, f_m(x, y) = 0$, ou bien $g_0(x, y) = 0, g_1(x, y) = 0, \dots, g_n(x, y) = 0$, comme on s'en assure facilement; dans les deux cas les éléments de l'un des deux systèmes composants

sont eux-mêmes nuls. Il est d'ailleurs manifeste que $F(z) = 0$ est l'équation résolvante du système $[f_0(x, y) = 0, f_1(x, y) = 0, \dots, f_m(x, y) = 0]$ et que $G(z) = 0$ est l'équation résolvante du système

$$[g_0(x, y) = 0, \dots, g_n(x, y) = 0].$$

Il faut donc, ou bien que $F(z)$ s'annule, ou bien que $G(z)$ s'annule; $R(z)$ n'ayant, par hypothèse, aucun facteur double, $F(z)$ et $G(z)$ sont premiers entre eux; il faut donc de toute manière que $R(z)$ s'annule.

Inversement, si pour $z = \zeta = u\xi + \eta$, l'on a $R(z) = 0$, il faut, ou bien que $F(\zeta) = 0$, ou bien que $G(\zeta) = 0$; l'un des deux systèmes composants et, par suite, le système composé a donc tous ses éléments égaux à zéro, pour $x = \xi, y = \eta$.

Ainsi $R(z)$ est bien le résultant du système composé,

$$[f_0(x, y), f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)][g_0(x, y), g_1(x, y), \dots, g_n(x, y)].$$

Comme $R(z)$ est aussi le résultant du système donné

$$[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)],$$

nous avons démontré l'équivalence

$$\begin{aligned} & [f_0(x, y), f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)][g_0(x, y), g_1(x, y), \dots, g_n(x, y)] \\ & \sim [A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)]. \end{aligned}$$

Donc, à la décomposition de $R(z)$ en deux facteurs, correspond une décomposition du système donné en deux systèmes faciles à déterminer.

Ce que nous venons de montrer pour deux facteurs est immédiatement étendu à un nombre quelconque de facteurs. Si donc, en adjoignant au domaine de rationalité les racines de l'équation résolvante $R(z) = 0$ nous décomposons le résultant en ses facteurs linéaires, à chacun de ces facteurs linéaires correspond une partie du système

$$[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_n(x, y)];$$

à $u(x - \xi_i) + v(y - \eta_i)$, par exemple, correspond l'élément

$$(x - \xi_i, y - \eta_i),$$

et nous pouvons écrire

$$[A_1(x, y), A_2(x, y), \dots, A_r(x, y)] \sim \prod_{(i)} (x - \xi_i, y - \eta_i).$$

Ce résultat, qui est loin d'être évident, est semblable à celui que M. KRONECKER a obtenu dans le paragraphe 20 de son grand mémoire, dans le cas général de n fonctions de n variables. Pour bien le mettre en évidence, je nommerai chacun des facteurs $(x - \xi_i, y - \eta_i)$ *diviseur irréductible de rang deux* du système donné; le mot irréductible se rapportant au domaine de rationalité qui a été fixé.

6. Il me reste à parler du cas où le résolvant a des facteurs multiples. Alors encore, nous pouvons résoudre le problème de l'élimination et obtenir toutes les courbes et tous les points du plan qui vérifient le système considéré. Mais si des systèmes d'équations nous passons aux systèmes de fonctions nous rencontrons une équivalence d'une nature plus générale que celle dont nous avons parlé jusqu'ici. C'est le théorème fondamental, démontré à la page 71, qui nous indique la généralisation à effectuer.

En nous conformant aux notations de ce théorème, nous dirons, mais dans ce numéro seulement, que le système dont les éléments sont les coefficients de la forme ϕ' , *contient* le système dont les éléments sont les coefficients f_1, \dots, f_{mn} de la forme φ , ou encore que la forme ϕ contient la forme φ . La forme contenant est donc racine d'une équation d'un degré déterminé ρ ; dans cette équation, le coefficient de la puissance $(\rho - k)$ est une fonction homogène, de dimension k , des coefficients de la forme contenu, pour $k = 1, 2, \dots, \rho$. Comme il est manifeste que, dans le théorème cité, la forme φ contient la forme ϕ , les deux formes φ et ϕ , et, par suite, les systèmes de leurs coefficients sont encore dits *équivalents*. Cette équivalence comprend celle des numéros précédents, où $\rho = 1$. On voit de suite que 1° si a est équivalent à b , b est aussi équivalent à a , et que 2° si a contient b , et si b contient c , a contient aussi c ; donc que 3° si a est équivalent à b , et si b est équivalent à c , que a est aussi équivalent à c . On peut donc opérer avec ces équivalences comme avec les précédentes.

Ceci posé, je reprends les notations de ce chapitre et je suppose que

le résolvant $R(z)$ contienne des facteurs multiples. Désignant par R_i la dérivée de R_k par rapport à z , je pose

$$R_1 = R: \text{Dv}(R, R'); R_2 = R_1: \text{Dv}(R_1, R'_1); \dots$$

il vient alors

$$R(z) = \sum_{k=1}^m r_k(x, y) u^k = \prod_{i=1}^{\nu} R_i(z)$$

ν indiquant l'ordre de multiplicité le plus élevé qui paraisse dans les facteurs linéaires de $R(z)$. Chacune des fonctions $R_i(z) = \sum_{(k)} r_k^{(i)}(x, y) u^k$ ne contiendra plus de facteurs linéaires multiples. Il en résulte, d'après les théorèmes démontrés dans les numéros précédents, les congruences

$$A_h \equiv 0 \pmod{r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \dots}; \quad \left(\begin{matrix} h=1, 2, \dots, \nu \\ i=1, 2, \dots, \nu \end{matrix} \right)$$

donc aussi

$$A_h \equiv 0 \pmod{\prod_{i=1}^{\nu} (r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \dots)}. \quad (h=1, 2, \dots, \nu)$$

Mais, d'autre part, dans le sens général donné maintenant à l'équivalence, A_h^{ν} est équivalent à A_h et $\prod_{(i)} (r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \dots)$ est équivalent à (r_0, r_1, \dots, r_m) . A_h , et, par suite, le système (A_1, A_2, \dots, A_n) contient donc le système (r_0, r_1, \dots, r_m) . Il est d'ailleurs manifeste que (r_0, r_1, \dots, r_m) contient (A_1, A_2, \dots, A_n) . Ainsi, dans le cas où le résolvant a des facteurs multiples, les systèmes sont encore *équivalents*, si nous éclaircissons la notion d'équivalence dans le sens du théorème de la page 71.

Dans le même ordre d'idées, on peut énoncer le théorème plus général que celui de la page 101:

Toute fonction qui s'annule pour les systèmes de racines communs à plusieurs fonctions quelconques, sans diviseur commun, est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions homogènes déterminées des fonctions quelconques considérées.

M. NETTO a le premier fait remarquer que cette équation est nécessairement binôme et de degré ν .

7. Mais nous sommes loin d'avoir ainsi résolu la *décomposition* des systèmes, dans le cas où le résolvant a des facteurs multiples. Il nous faudrait pour cela démontrer qu'à chaque décomposition du résolvant en

facteurs, correspond une décomposition du système. Or ici se présente un fait bien remarquable. *Le contraire peut avoir lieu.* M. KRONECKER en donne un exemple dans le paragraphe 21 de son mémoire. Voici cet exemple: $(x^2 + y, y^2)$ est un système qui n'est certes pas irréductible, puisque le système $(x^2 + y = 0, y^2 = 0)$ contient le système $(x = 0, y = 0)$. Cependant, et ici paraît, dans toute son évidence, la différence essentielle entre les diviseurs de rang deux et ceux de rang un, le système

$$(x^2 + y, y^2)$$

n'est pas décomposable en deux systèmes dont l'un est (x, y) , comme il est facile de s'en assurer.

Il y a donc des systèmes qui ne sont pas décomposables et ne sont cependant pas irréductibles. Ces systèmes doivent répondre au cas où le résolvant a des facteurs multiples, puisque dans le cas des facteurs simples nous avons pu toujours effectuer une décomposition en facteurs irréductibles.

Nous pouvons encore énoncer ce fait de la manière suivante. Lorsqu'on compose de toutes les manières possibles les fonctions irréductibles d'une ou de deux variables on obtient toutes les fonctions de ces variables que l'on puisse concevoir. La même chose a lieu pour les systèmes de rang un. Eh bien, en composant de toutes les manières possibles tous les systèmes irréductibles de rang deux, on n'obtient pas tous les systèmes possibles, de rang deux.

On peut maintenant être tenté, ou bien de rejeter entièrement, comme impropres, les systèmes que l'on n'obtient pas par composition des systèmes irréductibles, ou bien de chercher à élargir l'idée même de décomposition. Mais dans ce dernier cas, il semble que cette idée perdrait tout à fait le caractère essentiel de *séparation* que l'on y attache toujours. Rejetons-les donc et ne considérons que les systèmes obtenus en composant, de toutes les manières possibles, les systèmes irréductibles de rangs un et deux, de deux variables. Alors le problème de la décomposition des systèmes, toujours possible, sera entièrement résolu, que les facteurs du résolvant soient multiples ou non.

J'ai ainsi exposé simultanément la théorie générale de l'élimination, et celle de la décomposition d'un système dans le cas de deux variables seulement. Pour faire image, j'ai introduit les diviseurs de rang deux, en considérant des fonctions de deux variables et en ne tenant pas compte

des nombres entiers. En réalité, les systèmes de fonctions de deux variables, admettent non seulement des diviseurs de rang deux, mais aussi des diviseurs de rang trois et déjà les fonctions d'une variable admettent des diviseurs de rang deux, comme je l'ai fait voir, par un exemple, à la page 55. Maintenant que nous sommes familiarisés avec la notion de *rang*, il est facile de répéter les raisonnements de ce chapitre sur des fonctions d'une variable seulement, en tenant compte des nombres entiers.

§ 2.

Cas général d'un nombre quelconque de variables.

1. La méthode que nous avons suivie pour étudier la décomposition d'un système formé par un nombre quelconque de fonctions entières de deux variables, indique clairement la voie que nous devons suivre pour parvenir à une décomposition d'un système quelconque de fonctions entières. Elle nous empêche cependant de traiter ce problème dans toute sa généralité, en nous enlevant la possibilité de tenir toujours compte des cas où les résolvants que nous formerons, ont des facteurs multiples. Une méthode directe, dans laquelle nous ne supposerions pas connue l'existence des nombres algébriques nous permettrait, sans doute, d'éviter cette restriction. Il serait possible que la nouvelle généralisation de la notion de contenant et de contenu donnée par M. KRONECKER, et dont j'ai développé le théorème fondamental dans le chapitre précédent soit suffisante pour arriver, dans cet ordre d'idées, à débarrasser la théorie de la décomposition des systèmes de toute restriction. Pour le moment je me contenterai de résoudre le problème, parallèlement au cas de deux variables, en ne considérant que les systèmes tels que chacun des résolvants que je formerai, n'ait pas de facteurs multiples. Soient donc

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$G_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$G_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

un nombre quelconque de fonctions entières d'un nombre également quelconque de variables x_1, x_2, \dots, x_n , et $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(\rho)})$ le domaine de rationalité dont font partie les coefficients des fonctions entières et dans lequel nous allons chercher à décomposer le système considéré en systèmes plus simples.

Nous commencerons par transformer linéairement les variables x_1, x_2, \dots, x_n en posant

$$x_h = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(h)} x'_i \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

et en déterminant les coefficients $\alpha_i^{(h)}$ de manière que pour $k=1, 2, \dots, m$, le degré de la fonction entière G_k , par rapport à chacune des variables x_1, x_2, \dots, x_n , soit égal à la dimension ν_k de cette fonction. Cette transformation est toujours possible; car si $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ désigne l'ensemble des termes de la plus haute dimension de la fonction $G_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nous avons

$$\begin{aligned} g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= g_k(\alpha_1^{(1)} x'_1 + \dots + \alpha_n^{(1)} x'_n; \dots; \alpha_1^{(n)} x'_1 + \alpha_2^{(n)} x'_2 + \dots + \alpha_n^{(n)} x'_n) \\ &= g_k(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}) x_1^{\nu_k} + g_k(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}) x_2^{\nu_k} + \dots \\ &\quad \dots + g_k(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}) x_n^{\nu_k} \end{aligned}$$

et des termes de dimension ν_k contenant plusieurs des variables x_1, x_2, \dots, x_n . Comme, par hypothèse, $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n'est pas identiquement nulle, nous pouvons toujours déterminer les systèmes $\alpha_i^{(h)}$, $\alpha_2^{(h)}$, \dots , $\alpha_n^{(h)}$, ($h=1, 2, \dots, n$) tels que pour ces systèmes $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($k=1, 2, \dots, m$) soit différente de zéro; alors pour $k=1, 2, \dots, m$, le degré de $G_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à chacun des variables x'_1, x'_2, \dots, x'_n sera bien égal à la dimension ν_k de cette fonction.

Si, par cette transformation $G_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ devient $H_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ ($k=1, 2, \dots, m$), nous pouvons dire que les deux systèmes

$$(G_1, G_2, \dots, G_m) \text{ et } (H_1, H_2, \dots, H_m)$$

sont équivalents et nous borner à l'étude de la décomposition du second système (H_1, H_2, \dots, H_m) en systèmes plus simples.

Cette première transformation a, pour nous, un grand avantage. Aucune des fonctions H_1, H_2, \dots, H_m , ne peut, en effet, contenir un

nous savons que ce plus grand commun diviseur que nous désignerons par

$$R_1(x', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$$

contient toutes les variables $x', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$. Nous pouvons ainsi écrire

$$K_\lambda(x', x'_1, \dots, x'_{n-1}; u_1, \dots, u_{n-1})$$

$$= R_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-1}; u_1, \dots, u_{n-1}) L_\lambda(x', x'_1, \dots, x'_{n-1}; u_1, \dots, u_{n-1})$$

ainsi que l'équivalence

($\lambda=1, 2, \dots, m$)

$$(K_1, K_2, \dots, K_m) \sim R_1(L_1, L_2, \dots, L_m).$$

Ceci posé, cherchons à décomposer en systèmes plus simples le système (L_1, L_2, \dots, L_m) . Relativement à la variable x' , c'est à dire dans le domaine de rationalité $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \mathfrak{H}, \mathfrak{H}', \dots, \mathfrak{H}^{(p)})$, il est équivalent à l'unité.

Dans le cas des fonctions de deux variables nous avons formé le résultant des deux fonctions et nous avons fait usage du théorème que ce résultant égalé à zéro est la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les variables qui y paraissent, pour que les deux fonctions, sans diviseur commun pour des valeurs indéterminées données à ces variables, aient précisément un diviseur commun. Nous avons ainsi pu déterminer outre les diviseurs ordinaires, communs aux deux fonctions et que nous pouvons nommer *diviseurs de rang un*, d'autres éléments, communs aux deux fonctions, qui sont d'une variété moindre, ce que les points sont aux lignes en géométrie plane, et que nous pouvons, pour cette raison, nommer *diviseurs de rang deux*. Afin de pouvoir appliquer le même théorème dans le cas plus général qui nous occupe et trouver ainsi outre le diviseur $R_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-1}; u_1, \dots, u_{n-1})$ de rang un qui représente une variété $n^{\text{ième}}$, des diviseurs représentant une variété moindre, relierons linéairement les fonctions L_1, L_2, \dots, L_m par deux systèmes d'indéterminées

$$(U_1, U_2, \dots, U_m) \text{ et } (V_1, V_2, \dots, V_m)$$

et formons le résultant, par rapport à x'_{n-1} , des deux fonctions

$$\sum_{i=1}^m U_i L_i \text{ et } \sum_{i=1}^m V_i L_i.$$

Ce résultant sera une fonction entière des variables $x', x'_1, \dots, x'_{n-2}$, et des indéterminées $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, U_1, U_2, \dots, U_m, V_1, V_2, \dots, V_m$. Nous le désignerons par

$$S_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}; u_1, u_2, \dots, u_{n-1}; U_1, \dots, U_m; V_1, \dots, V_m; \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(\rho)}).$$

Le degré de $U_1 L_1 + U_2 L_2 + \dots + U_m L_m$, par rapport à x'_{n-1} , est manifestement égal à la dimension de cette fonction; il en est de même de celui de $V_1 L_1 + V_2 L_2 + \dots + V_m L_m$. Les coefficients a_0 et b_0 des plus hautes puissances de ces fonctions ordonnées par rapport à x'_{n-1} sont donc des fonctions entières des indéterminées U et V , et sont, par suite, différentes de zéro, quelles que soient les relations qui lient les autres variables $x', x'_1, \dots, x'_{n-2}$. Donc $S_1 = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que $U_1 L_1 + U_2 L_2 + \dots + U_m L_m$ et $V_1 L_1 + V_2 L_2 + \dots + V_m L_m$ aient un diviseur commun.

Soient $s'_1, s'_1, \dots, s_1^{(m_1)}$ les coefficients de S_1 considérée comme fonction des indéterminées U et V ; chacune des quantités $s_1^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots, m_1$) est alors une fonction entière des variables $x', x'_1, \dots, x'_{n-2}$ et des indéterminées u , dont les coefficients font partie du domaine de rationalité $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots, \mathfrak{R}^{(\rho)})$. Si le système d'équations $s'_1 = 0, s'_1 = 0, \dots, s_1^{(m_1)} = 0$, est vérifié, la fonction S_1 sera nulle, donc $U_1 L_1 + U_2 L_2 + \dots + U_m L_m$ et $V_1 L_1 + V_2 L_2 + \dots + V_m L_m$ auront un diviseur commun; ce diviseur est indépendant des indéterminées U_1, U_2, \dots, U_m puisqu'il divise $V_1 L_1 + V_2 L_2 + \dots + V_m L_m$; il est indépendant des indéterminées V_1, V_2, \dots, V_m puisqu'il divise $U_1 L_1 + U_2 L_2 + \dots + U_m L_m$; il est donc contenu dans chacune des fonctions L_1, L_2, \dots, L_m . Inversement, si pour certaines liaisons des variables $x', x'_1, \dots, x'_{n-2}$, les fonctions L_1, L_2, \dots, L_m ont un diviseur commun, il en est de même des deux fonctions $U_1 L_1 + U_2 L_2 + \dots + U_m L_m$ et $V_1 L_1 + V_2 L_2 + \dots + V_m L_m$, donc $S_1 = 0$. Rien n'empêche d'ailleurs de prendre autant de systèmes d'indéterminées que l'on veut, $U_1^{(h)}, U_2^{(h)}, \dots, U_m^{(h)}$ et $V_1^{(h)}, V_2^{(h)}, \dots, V_m^{(h)}$, et de former pour chacun d'eux le résultant $S_1^{(h)}$ des deux fonctions $U_1^{(h)} L_1 + U_2^{(h)} L_2 + \dots + U_m^{(h)} L_m$ et $V_1^{(h)} L_1 + V_2^{(h)} L_2 + \dots + V_m^{(h)} L_m$. Toutes ces fonctions $S_1^{(h)}$ seront nulles; elles ne diffèrent que par les indéterminées qui y paraissent; donc les coefficients de ces indéterminées

seront nuls, et nous voyons que, dans notre hypothèse, le système d'équations

$$s'_1 = 0, s''_1 = 0, \dots, s_1^{(m_1)} = 0$$

est vérifié.

Le système $(s'_1 = 0, s''_1 = 0, \dots, s_1^{(m_1)} = 0)$ est ainsi entièrement équivalent au système $(L_1 = 0, L_2 = 0, \dots, L_m = 0)$. Mais il a sur ce système un grand avantage; il ne contient plus explicitement la variable x'_{n-1} . Chacune des fonctions $s_1^{(h)}$ contient, il est vrai, les indéterminées u_1, u_2, \dots, u_{n-1} ; le système d'équations

$$s'_1 = 0, s''_1 = 0, \dots, s_1^{(m_1)} = 0,$$

représente donc un grand nombre de relations entre les variables $x', x'_1, \dots, x'_{n-2}$; mais le nombre d'éléments d'un système n'est pas ce qui le caractérise comme je l'ai déjà observé plus d'une fois; le grand nombre de relations que nous obtenons pour notre système transformé ne contrebalance donc pas l'avantage qui résulte de la réduction du nombre des variables.

Cette réduction est absolument la même que celle que nous avons obtenue dans le cas de deux fonctions de deux variables; comme alors, c'est l'emploi des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n qui nous permet de joindre deux variables en une seule; pour $h = 1, 2, \dots, m_1$, la fonction

$$s_1^{(h)}(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

est identiquement égale à

$$s_1^{(h)}(u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + \dots + u_n x'_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}; u_1, u_2, \dots, u_n);$$

c'est une fonction entière des variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}$ et de

$$u_{n-1} x'_{n-1} + u_n x'_n,$$

tandis que dans chacune des fonctions entières

$$L(x', x'_1, \dots, x'_{n-1}; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

les variables x'_{n-1} et x'_n ne paraissent pas, jointes par les indéterminées

u_{n-1} et u_n . Ces indéterminées ne sont d'ailleurs contenues qu'en apparence dans l'expression

$$L(u_1x'_1 + u_2x'_2 + \dots + u_nx'_n; u_1, u_2, \dots, u_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$$

car le produit des deux fonctions entières de u_1, u_2, \dots, u_n

$$R_1(u_1x'_1 + u_2x'_2 + \dots + u_nx'_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

et

$$L(u_1x'_1 + u_2x'_2 + \dots + u_nx'_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

est identiquement égal à

$$H_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n);$$

pour bien le mettre en évidence, nous poserons

$$L(u_1x'_1 + u_2x'_2 + \dots + u_nx'_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; u_1, u_2, \dots, u_n) = A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

2. Recherchons maintenant si l'équivalence des deux systèmes

$$(s'_1, s'_1, \dots, s_1^{(m)}) \text{ et } (L_1, L_2, \dots, L_m)$$

est de la nature de celles que nous avons définies dans le chapitre précédent. Nous observons d'abord que le résultant S_1 des deux fonctions $U_1L_1 + U_2L_2 + \dots + U_mL_m$ et $V_1L_1 + V_2L_2 + \dots + V_mL_m$ étant une fonction homogène et linéaire de ces deux fonctions dont les coefficients sont fonctions entières des quantités $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u_1, u_2, \dots, u_n$, S_1 contiendra le système (L_1, L_2, \dots, L_m) ; il en résulte que chacune des fonctions $s_1^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots, m_1$), contiendra le même système ou encore le système

$$(A_1, A_2, \dots, A_m).$$

Mais alors pour $k = 1, 2, \dots, \tau$, les coefficients $\sigma_i^{(k)}$, ($i = 1, 2, \dots, \nu$), de $s^{(k)}$ considérée comme fonctions des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n , sont eux-mêmes fonctions linéaires et homogènes de A_1, A_2, \dots, A_m à coefficients fonctions entières, de sorte que nous avons le système de congruences

$$\sigma_{i,k}^{(k)} \equiv 0 \pmod{A_1, A_2, \dots, A_m}, \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \dots, \tau \\ i=1, 2, \dots, \nu \end{pmatrix}$$

D'autre part, si nous considérons les deux fonctions

$$M_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \sum_{(h,k)} w_h^{(k)} \sigma_h^{(k)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ \left(\begin{matrix} h=1, 2, \dots, m_1 \\ k=1, 2, \dots, \nu_1 \end{matrix} \right)$$

$$N_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \sum_{(h,k)} w_h^{(k)} \sigma_h^{(k)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

où les $w_h^{(k)}$ et $w_h^{\prime(k)}$ désignent deux systèmes d'indéterminées, et si nous cherchons à déterminer *deux* multiplicateurs entiers

$$\alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ et } \beta_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

de manière à vérifier l'égalité

$$A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ = \alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) M_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) + \beta_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) N_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

ou, ce qui revient au même, *un* multiplicateur entier $\alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de manière à vérifier la congruence

$$A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \equiv \alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) M(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \pmod{N(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)},$$

nous avons, d'après la formule de LAGRANGE,

$$\alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ = \sum_{(k)} \frac{A(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)})}{M_1(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)})} \frac{N_1(x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n)}{x'_n - \xi_n^{(k)}} \frac{1}{D_{x'_n} N_1(x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n)_{x'_n = \xi_n^{(k)}}}$$

$\xi^{(k)}$ désignant l'une quelconque des racines de l'équation

$$N_1(x'_n) = 0$$

et la somme étant étendue à toutes ces racines.

Le problème est maintenant identique à celui qui s'est présenté dans le paragraphe précédent. Il s'agit de voir si la forme sous laquelle nous venons d'écrire le multiplicateur $\alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ peut être illusoire, pour des valeurs particulières données aux variables x'_1, x'_2, \dots, x'_n .

Convenons, une fois pour toutes, de ne restreindre la variabilité des variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ que par *une* équation, ce qui revient à laisser

par exemple $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}$ indéterminées, à les joindre au domaine de rationalité et à donner alors à x'_{n-1} une valeur particulière; ou encore, à relier x_1, x_2, \dots, x_n par deux relations indépendantes, seulement. Nous nous apercevrons bientôt de la raison qui nous amène à faire cette restriction; sans elle, en effet, nous ne pourrions pas résoudre le problème de l'équivalence des systèmes de fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Il nous faut faire encore une autre hypothèse. Nous n'avons pu résoudre entièrement la question proposée, pour $n = 2$, que dans le cas où le résolvant du système considéré, qui était le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme $S(U, V)$, n'a pas de facteurs multiples; et nous avons vu qu'alors le dénominateur $H(x, y)$ ne pouvait être nul que du premier ordre pour une valeur particulière donnée à y . Nous ferons ici l'hypothèse équivalente en supposant que, les $n - 2$ variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}$ restant indéterminées, le plus grand commun diviseur des coefficients de la fonction $S(x', x'_1, \dots, x'_{n-2})$, considérée comme une fonction des indéterminées w et w' , n'ait pas de facteurs multiples; alors, lorsque le dénominateur $M_1(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)})$ s'annule pour une valeur déterminée, indépendante des indéterminées w et w' , donnée à x'_{n-1} , il ne sera nul que du premier ordre.

Cette hypothèse est plus que suffisante pour l'objet que nous avons en vue; car il suffirait, pour démontrer que l'expression précédente de $\alpha_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ n'est pas illusoire, de supposer simplement que la fonction $A(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)})$ qui s'annule en même temps que $M(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)})$ pour des systèmes indépendants des indéterminées w et w' , soit, pour ces systèmes, au moins nulle d'un ordre aussi élevé que $M(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)})$.

Sous cette hypothèse, on voit facilement que l'expression de $\alpha_1(x'_1, \dots, x'_n)$ donnée par la formule de LAGRANGE, n'est pas illusoire, pour des valeurs indépendantes des indéterminées w et w' données à x'_1, x'_2, \dots, x'_n . Le raisonnement est le même que dans le cas de deux variables, et je ne le répéterai pas.

Le produit

$$\prod_{(k)} M_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \xi_n^{(k)}) \prod_{(k)} D_{x'_n} N(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x'_n)_{x'_n = \xi_n^{(k)}}$$

est une fonction entière des indéterminées w et w' ; nous pouvons le mettre sous la forme

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})E(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; w, w')$$

en désignant par $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ le plus grand commun diviseur des coefficients des indéterminées w et w' , et, par suite, par $E(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; w, w')$ une forme *primitive* des mêmes indéterminées. Les coefficients de cette forme, n'ayant aucun facteur commun, ne peuvent s'annuler simultanément lorsque la variabilité de $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ n'est limitée que par une relation algébrique.

Posons, pour abréger,

$$\gamma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = E(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; w, w')\alpha(x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

Le résultat obtenu est que la fonction $\gamma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ ne se présente jamais sous une forme illusoire. Mais alors la fonction rationnelle de $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$, donnée par la formule de LAGRANGE,

$$\gamma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

est sûrement fonction entière de x'_{n-1} ; elle est donc fonction entière de x'_1, \dots, x'_{n-2} ; en effet, nous avons démontré dans le second chapitre, qu'une fonction rationnelle de plusieurs variables x, y, z, \dots qui est entière par rapport à l'une des variables x , est également entière par rapport à toutes les autres y, z, \dots , à condition toutefois que le dénominateur de la fonction rationnelle ne contienne pas de facteur indépendant de x . Cette condition peut être, ici, considérée comme vérifiée puisque nous avons commencé par transformer les variables x_1, x_2, \dots, x_n à l'aide d'une substitution linéaire à coefficients constants, et que nous pouvons choisir ces coefficients d'une manière arbitraire, pourvu qu'une relation déterminée ne soit pas vérifiée; nous les choisirons, après coup, tels, qu'en outre, la dimension de $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ soit égale au degré, de cette fonction par rapport à la variable x'_{n-1} ; en répétant alors tous nos raisonnements, nous serons certain que $\gamma(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x'_n)$ est une fonction entière des n variables x'_1, x'_2, \dots, x'_n .

La congruence

$$E(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; w, w') A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \equiv \gamma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) M_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ \pmod{N_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}$$

une fois vérifiée, le quotient

$$\beta_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ = \frac{E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; w, w') A(x'_1, \dots, x'_n) - \gamma_1(x'_1, \dots, x'_n) M_1(x'_1, \dots, x'_n)}{N_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}$$

est nécessairement une fonction entière de x'_n ; toujours d'après le même théorème, il est donc également fonction entière des autres variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$.

Ainsi l'égalité

$$E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; w, w') A(x'_1, \dots, x'_n) \\ = \gamma_1(x'_1, \dots, x'_n) M_1(x'_1, \dots, x'_n) + \beta_1(x'_1, \dots, x'_n) N_1(x'_1, \dots, x'_n)$$

est vérifiée pour les deux fonctions entières $\gamma_1(x'_1, \dots, x'_n)$ et $\beta_1(x'_1, \dots, x'_n)$ que nous venons de former. Ces fonctions entières dépendent des indéterminées w et w' ; ordonnons les deux termes de l'égalité précédente, suivant ces indéterminées, et comparons les coefficients. Dans chacune des égalités que nous obtenons, le terme de droite est une fonction linéaire et homogène des fonctions $\sigma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$; les coefficients de ces fonctions $\sigma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont des fonctions entières des variables x'_1, x'_2, \dots, x'_n ; si pour une valeur particulière donnée à x'_n et une relation particulière entre x'_1, \dots, x'_{n-1} , toutes les fonctions $\sigma(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont nulles, le terme de droite est nul, donc aussi le terme de gauche. Pour en conclure que la fonction $A(x'_1, \dots, x'_n)$ est alors elle-même nulle, ce qui est nécessaire pour que cette égalité réponde à notre recherche, il serait nécessaire de savoir que pour la relation particulière considérée, le coefficient de $A(x'_1, \dots, x'_n)$ ne peut être nul. Or, nous savons seulement que tous les coefficients de la forme primitive

$$E(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}; w, w')$$

ne peuvent être nuls simultanément pour cette relation particulière; mais chacun d'eux peut parfaitement s'annuler à son tour, si nous considérons successivement plusieurs relations particulières. Aucune des égalités précédentes ne répond donc à notre recherche.

Nous parvenons cependant bien simplement au résultat, et cela en divisant les deux termes de l'égalité démontrée par une forme primitive $E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; t, t')$ dont les coefficients sont identiques à ceux de la forme primitive $E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; w, w')$: Nous obtenons alors, en effet, une nouvelle égalité,

$$\frac{E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; w, w')}{E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; t, t')} A(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{(h)} \tau_h(x'_1, \dots, x'_n; w, w', t, t') \sigma_h(x'_1, \dots, x'_n)$$

dans laquelle les expressions $\tau_h(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; w, w', t, t')$ sont, il est vrai, des fonctions *rationnelles* de $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$, mais ne contiennent au dénominateur qu'une forme *primitive* des indéterminées t et t' . Si donc toutes les fonctions $\sigma(x'_1, \dots, x'_n)$ s'annulent lorsque x'_n ayant une valeur déterminée, les variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ sont liées par une relation particulière, les coefficients $\sigma(x'_1, \dots, x'_n)$ de ces fonctions, quoique se présentant sous forme de fractions ne seront pas infinis, et, par suite, comme tout à l'heure, l'expression

$$\frac{E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; w, w')}{E(x'_1, \dots, x'_{n-1}; t, t')} A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

sera nulle. Mais maintenant nous pouvons en conclure que la fonction $A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sera elle-même égale à zéro; car le quotient des deux formes *primitives* $E(w, w')$ et $E(t, t')$ ne saurait être, pour une relation particulière entre $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$, ni nul, ni infini.

Nous voyons donc que s'il est impossible de mettre toujours les quantités $A(x'_1, \dots, x'_{n-1})$, elles-mêmes, sous la forme de fonctions linéaires et homogènes des quantités $\sigma(x'_1, \dots, x'_n)$, dont les coefficients soient fonctions entières de x'_1, \dots, x'_n , il est, par contre, toujours possible de mettre sous la forme d'une fonction linéaire et homogène des quantités $\sigma(x'_1, \dots, x'_n)$, le produit de la fonction $A(x'_1, \dots, x'_n)$ par le quotient de deux formes primitives ayant mêmes coefficients, les coefficients de cette fonction homogène et linéaire étant toujours finis et déterminés.

lorsque les variables x'_1, \dots, x'_{n-1} ne sont liées que par une relation algébrique. Nous sommes ainsi amenés à dire qu'une fonction entière F d'un nombre quelconque n de variables, contient un système donné (f_1, f_2, \dots, f_m) , et à écrire

$$F \equiv 0 \pmod{f_1, f_2, \dots, f_m}$$

lorsque nous pouvons, en multipliant F par le quotient de deux formes primitives, ayant mêmes coefficients, établir une égalité

$$\frac{E(U)}{E(V)} F = \sum_{k=1}^m \varphi_k \cdot f_k$$

dans laquelle nous soyons certain que tous les coefficients φ_k soient finis et déterminés, quelle que soit la relation particulière qui lie les $(n-1)$ variables paraissant au dénominateur.

Le quotient $\frac{E(U)}{E(V)}$ des deux formes primitives $E(U)$ et $E(V)$ joue vraiment ici le rôle d'une unité.

C'est dans ce sens plus large que celui que nous avons donné en commençant, parce qu'il suffisait dans le cas des fonctions de deux variables, qu'il faut entendre l'équivalence des deux systèmes

$$[A_1(x'_1, \dots, x'_n), A_2(x'_1, \dots, x'_n), \dots, A_m(x'_1, \dots, x'_n)]$$

et

$$[\sigma'_{11}(x'_1, \dots, x'_n), \sigma'_{12}(x'_1, \dots, x'_n), \dots, \sigma^{(m)}_{1, \nu_1}(x'_1, \dots, x'_n)].$$

Nous appliquerons aussi à ce genre d'équivalences, le symbole \sim , et nous écrirons

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) \sim (\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \dots, \sigma'_{1, \nu_1}, \sigma''_{11}, \dots, \sigma^{(m)}_{1, \nu_1}).$$

Nous voyons enfin facilement qu'à l'aide des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , prises plusieurs fois, les deux systèmes

$$[A_1(x'_1, \dots, x'_n), A_2(x'_1, \dots, x'_n), \dots, A_m(x'_1, \dots, x'_n)]$$

et

$$[s'_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}), s''_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}), \dots, s^{(m)}_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-2})]$$

sont aussi équivalents.

3. Nous avons jusqu'ici ramené l'étude du système quelconque donné à celui d'un système

$$(s'_1, s'_1, \dots, s_1^{(m_1)})$$

dont les éléments, considérés comme des fonctions des variables

$$x', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2},$$

contiennent une variable de moins que ceux du système proposé, et nous avons vu ce qu'il faut entendre par équivalence de ces deux systèmes, puisque nous venons de traduire cette équivalence par une équation algébrique.

Il nous faut maintenant répéter sur le système $(s'_1, s'_1, \dots, s_1^{(m_1)})$ les mêmes raisonnements que nous avons faits tout à l'heure sur le système (G_1, G_2, \dots, G_m) . Nous introduirons tout d'abord de nouvelles variables

$$x''_1, x''_2, \dots, x''_{n-1}$$

fonctions linéaires des précédentes et nous déterminerons les coefficients de ces fonctions linéaires de manière que pour $i = 1, 2, \dots, m_1$, le degré de $s_1^{(i)}$ par rapport à chacune des nouvelles variables soit égal à la dimension de cette fonction. Le système

$$[s'_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}, u_1, \dots, u_n); s'_1(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}, u_1, \dots, u_n); \dots \\ \dots; s_1^{(m_1)}(x', x'_1, \dots, x'_{n-2}, u_1, \dots, u_n)]$$

est ainsi transformé en un système équivalent que nous désignerons par

$$[H'_1(x''_1, x''_2, \dots, x''_{n-1}, u_1, \dots, u_n); H'_2(x''_1, x''_2, \dots, x''_{n-1}, u_1, \dots, u_n); \dots \\ \dots; H'_{m_1}(x''_1, x''_2, \dots, x''_{n-1}, u_1, \dots, u_n)].$$

Nous relierons ensuite les nouvelles variables par une fonction homogène et linéaire à coefficients indéterminés

$$x'' = v_1 x''_1 + v_2 x''_2 + \dots + v_{n-1} x''_{n-1}; \quad v_{n-1} = 1,$$

Après avoir relié les éléments $L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1}$, par deux systèmes d'indéterminées U_1, U_2, \dots, U_{m_1} et V_1, V_2, \dots, V_{m_1} , nous formons le résultant S_2 des deux fonctions

$$\sum_{(k)} U_k L'_k \quad \text{et} \quad \sum_{(k)} V_k L'_k \quad (k=1, 2, \dots, m_1)$$

par rapport à la variable x''_{n-2} . Si $s'_2, s''_2, \dots, s_2^{(m_2)}$, désignent les coefficients de la fonction S_2 ordonnée suivant les puissances des indéterminées U et V , et si $\sigma_{2i}^{(k)}$, ($k=1, 2, \dots, m_2$; $i=1, 2, \dots, v_2$) sont les coefficients des fonctions $s'_2, s''_2, \dots, s_2^{(m_2)}$ ordonnées par rapport aux puissances des indéterminées v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , nous voyons, en raisonnant comme tout à l'heure, que le système

$$(\sigma'_{21}, \sigma'_{22}, \sigma'_{23}, \dots, \sigma'_{2v_2}, \sigma''_{21}, \dots, \sigma_{2v_2}^{(m_2)})$$

est équivalent au système

$$(A'_1, A'_2, \dots, A'_{m_1})$$

dans le sens que nous avons été amenés à donner à l'équivalence en recherchant les rapports des deux systèmes

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) \quad \text{et} \quad (\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \dots, \sigma'_{1v_1}, \sigma''_{11}, \dots, \sigma_{1v_1}^{(m_1)}).$$

Les indéterminées v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ne sont contenues qu'en apparence dans les éléments $L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1}$, considérés comme fonctions de $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$; c'est pourquoi nous avons posé pour plus de clarté

$$L'_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}) \\ = L'_k(v_1 x''_1 + v_2 x''_2 + \dots + v_{n-1} x''_{n-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}).$$

($k=1, 2, \dots, m_1$)

Mais les indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n font partie intégrante des fonctions $L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1}$, et sont, par suite, contenues dans les fonctions $A'_1, A'_2, \dots, A'_{m_1}$; il ne faut donc pas ici, pour rechercher l'équivalence des systèmes, revenir aux coefficients des fonctions $\sigma_{2i}^{(k)}$, ordonnées suivant les puissances des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n ; il faut, au contraire, comparer les systèmes qui contiennent encore ces indéterminées. Cette différence ne change rien au raisonnement que nous avons fait plus

haut; nous pouvons, par exemple, joindre simplement u_1, u_2, \dots, u_n au domaine de rationalité. En répétant alors le même raisonnement nous voyons que chacune des fonctions $A'_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, u_1, \dots, u_n)$, ($k = 1, 2, \dots, m_1$), multipliée par le quotient de deux formes primitives par rapport aux variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}$, peut être mise sous la forme d'une fonction linéaire et homogène des fonctions

$$\sigma_{21}^{(k)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, u_1, \dots, u_n), \quad (i = 1, 2, \dots, \nu_2; k = 1, 2, \dots, m_2)$$

dont les coefficients sont fonctions entières de x'_{n-1} et ne contiennent au dénominateur qu'une forme primitive par rapport aux variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}$. Le système $(A'_1, A'_2, \dots, A'_{m_1})$ contient donc le système $(\sigma'_{21}, \sigma'_{22}, \dots, \sigma'_{2\nu_2}, \sigma'_{21}, \dots, \sigma_{2\nu_2}^{(m_2)})$. Inversement S_2 et, par suite, le système $(\sigma'_{21}, \sigma'_{22}, \dots, \sigma_{2\nu_2}, \sigma'_{21}, \dots, \sigma_{2\nu_2}^{(m_2)})$ contient le système $(A'_1, A'_2, \dots, A'_{m_1})$. Les deux systèmes que nous comparons sont donc *équivalents*, et nous pouvons écrire

$$(A'_1, A'_2, \dots, A'_{m_1}) \sim (\sigma'_{21}, \sigma'_{22}, \dots, \sigma'_{2\nu_2}, \sigma'_{21}, \dots, \sigma_{2\nu_2}^{(m_2)}).$$

De plus, comme le système $(\sigma'_{21}, \sigma'_{22}, \dots, \sigma'_{2\nu_2}, \sigma'_{21}, \dots, \sigma_{2\nu_2}^{(m_2)})$ est lui-même équivalent au système formé par les éléments $s'_2, s'_2, \dots, s_2^{(m_2)}$, pris un certain nombre de fois, et pour des systèmes différents d'indéterminées v_1, \dots, v_{n-1} , nous avons aussi démontré l'équivalence, à l'aide d'indéterminées v en nombre suffisant, des deux systèmes

$$[A_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}), A_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}), \dots, A_{m_1}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})]$$

et

$$[s'_2(x'', x'_1, \dots, x'_{n-3}), s_2''(x'', x'_1, \dots, x'_{n-3}), \dots, s_2^{(m_2)}(x'', x'_1, \dots, x'_{n-3})]$$

où, pour abrégér, nous n'avons écrit qu'une fois, dans la dernière parenthèse, chacun des éléments $s_2^{(i)}$.

4. Nous continuons ainsi et nous formons successivement une série de fonctions

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_{n-2}, R_{n-1}$$

contenant respectivement $n, n-1, n-2, \dots, 3$, et enfin deux variables. Nous retombons en dernier lieu dans le cas particulier d'un nombre quel-

conque de fonctions de deux variables, cas particulier que nous avons étudié dans le paragraphe précédent.

Soient

$$R_{n-1}(x^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}; u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_{n-1}; \dots; w_1, w_2)$$

le plus grand commun diviseur de ces fonctions de deux variables, et

$$[L_1^{(n-2)}(x^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots, w_1, w_2); \dots; L_{m_{n-2}}^{(n-2)}(x^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots, w_1, w_2)]$$

le système débarassé de ce plus grand commun diviseur et déjà transformé de manière que pour $i = 1, 2, \dots, m_{n-2}$, le degré de la fonction $L_i^{(n-2)}$, par rapport à $x^{(n-1)}$ et à $x_1^{(n-1)}$ soit égal à la dimension de cette fonction.

Nous formons le résultant, par rapport à $x_1^{(n-1)}$, des deux fonctions

$$\sum_{(k)} U_k L_k^{(n-2)} \quad \text{et} \quad \sum_{(k)} V_k L_k^{(n-2)}; \quad (k=1, 2, \dots, m_{n-2})$$

si nous désignons par

$$S_{n-1}(x^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots, w_1, w_2; U_1, \dots, U_{m_{n-2}}, V_1, \dots, V_{m_{n-2}})$$

ce résultant; par

$$s_{n-1}^{(h)}(x^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots, w_1, w_2) \quad (h=1, 2, \dots, m_{n-1})$$

les coefficients de S_{n-1} , ordonnée par rapport aux indéterminées U et V ; par

$$\sigma'_{n-1,1}, \sigma'_{n-1,2}, \sigma'_{n-1,3}, \dots, \sigma_{n-1, v_{n-1}}^{(m_{n-1})}$$

les coefficients des $s_{n-1}^{(h)}$, ($h = 1, 2, \dots, m_{n-1}$) ordonnées par rapport aux indéterminées w_1 et w_2 , après que l'on a substitué à $x^{(n-1)}$ sa valeur

$$w_1 x_1^{(n-1)} + w_2 x_2^{(n-1)};$$

et enfin par

$$I_i^{(n-2)}(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots) \quad (i=1, 2, \dots, m_{n-2})$$

les fonctions

$$L_i^{(n-2)}(w_1 x_1^{(n-1)} + w_2 x_2^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots, w_1, w_2) \\ (i = 1, 2, \dots, m_{n-1})$$

qui ne contiennent qu'en apparence les indéterminées w_1 et w_2 , nous voyons, comme dans le paragraphe précédent, que les deux systèmes

$$(L_1^{(n-2)}, L_2^{(n-2)}, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-2)}) \quad \text{et} \quad (\sigma'_{n-1,1}, \sigma'_{n-1,2}, \dots, \sigma_{n-1, m_{n-1}}^{(m_{n-1})})$$

sont équivalents, dans le sens que nous avons attaché à ce mot dans le chapitre précédent, et, à plus forte raison, dans le sens plus général que nous lui avons donné dans ce paragraphe-ci.

Soient

$$R_n(x^{(n-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}, \dots, w_1, w_2)$$

le plus grand commun diviseur des fonctions $s_{n-1}^{(h)}$, ($h = 1, 2, \dots, m_{n-1}$) et

$$s_{n-1}^{(h)}(x^{(n-1)}, u_1, \dots, w_2) = R_n(x^{(n-1)}, u_1, \dots, w_2) L_h^{(n-1)}(x^{(n-1)}, u_1, \dots, w_2). \\ (h = 1, 2, \dots, m_{n-1})$$

Les fonctions $L_1^{(n-1)}, L_2^{(n-1)}, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ de la seule variable $x^{(n-1)}$ étant sans diviseur commun, l'équivalence *absolue*

$$(L_1^{(n-1)}, L_2^{(n-1)}, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-1)}) \sim 1$$

est manifeste.

Si cependant nous considérons, outre les variables, les nombres entiers, il est possible que les fonctions $L_1^{(n-1)}, L_2^{(n-1)}, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ aient un diviseur commun de rang deux. Je rappelle l'exemple donné dans le chapitre précédent. Pour obtenir ce diviseur, formons le résultant, par rapport à $x^{(n-1)}$, des deux fonctions

$$\sum_{(k)} U_k L_k^{(n-1)} \quad \text{et} \quad \sum_{(k)} V_k L_k^{(n-1)}.$$

Ce résultant sera une forme, à coefficients *entiers*, des indéterminées u, v, \dots, w . Soit R_{n+1} le plus grand commun diviseur des coefficients

de cette forme; comme toute forme primitive, à coefficients entiers, est équivalente à l'unité, nous aurons l'équivalence *absolue*

$$(L_1^{(n-1)}, L_2^{(n-1)}, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-1)}) \sim R_{n+1}.$$

5. Ainsi l'ensemble des fonctions R_1, R_2, \dots, R_{n+1} , ou, si nous ne tenons pas compte des nombres entiers, l'ensemble des fonctions R_1, R_2, \dots, R_n remplace le système donné, et le remplace complètement. La première condition de toute *décomposition* d'un système de fonctions se trouve aussi remplie; car chaque fonction R_k contient un nombre différent de variables, et nous avons ainsi isolés les variétés d'ordres différents représentées par le système d'équations correspondant. C'est à la *condensation* des variables x_1, x_2, \dots, x_n , à l'aide des indéterminées u, v, \dots, w , que nous devons ce résultat.

Il y a plus; le théorème sur la décomposition des systèmes que nous avons démontré à la fin du paragraphe précédent, a encore lieu. Cependant comme sa démonstration, tout en étant analogue au cas de deux variables, exige la notation du résultant de n fonctions de n variables, notion que nous ne pouvons pas établir sans longueurs avant d'avoir résolu le problème général de l'élimination, nous ne la donnerons pas ici.⁽¹⁾ Mais, comme de ce théorème résulte que c'est bien une *décomposition* du système (G_1, G_2, \dots, G_m) que nous avons obtenue, et que ce fait est de la plus haute importance, nous introduirons, dès maintenant, une terminologie qui le mette bien en évidence. Nous nommerons R_1 *résolvant de rang un*, R_2 *résolvant de rang deux*, et, en général

$$R_k(x^{(k-1)}, x_1^{(k-1)}, \dots, x_{n-k}^{(k-1)}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots)$$

résolvant de rang k du système considéré. Un ou plusieurs de ces résolvants peuvent, pour des systèmes particuliers donnés, se réduire à l'unité.

Nous pouvons alors aussi définir rigoureusement ce qu'il faut entendre par *rang* d'un système de modules contenu dans un autre système de modules, ou encore par *rang de divisibilité*. Nous avons obtenu le résol-

(¹) Comparez KRONECKER, Festschrift § 20.

vant de rang un, en cherchant le plus grand commun diviseur de toutes les fonctions K_1, K_2, \dots, K_m dont le système est équivalent à celui des fonctions G_1, G_2, \dots, G_m . Ce résolvant R_1 est, dans le sens ordinaire du mot, contenu dans le système

$$(K_1, K_2, \dots, K_m);$$

nous dirons qu'il est le *plus grand commun diviseur, de rang un*, de ce système. Mais le système

$$(L_1, L_2, \dots, L_m)$$

est également contenu dans le système (K_1, K_2, \dots, K_m) ; il est, de plus, équivalent au système $(\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \dots, \sigma'_{1v_1})$ ou encore au système dont les éléments sont les coefficients $s'_1, s'_1', \dots, s_1^{(m_1)}$ de la forme $S_1(w, w')$, ces coefficients étant pris pour plusieurs systèmes d'indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n ; mais, ces éléments $s'_1, s'_1', \dots, s_1^{(m_1)}$, ont, comme plus grand commun diviseur *de rang un*, le résolvant R_2 *de rang deux*; c'est pourquoi nous dirons que le système (L_1, L_2, \dots, L_m) , ou encore le système $(\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \dots, \sigma'_{1v_1})$, ou tout autre système équivalent, est un diviseur *de rang deux* du système donné.

Comme le système $(s'_1, s'_1', \dots, s_1^{(m_1)})$ est équivalent au produit $R_2(L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1})$, le système $(L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1})$ est contenu dans le système (L_1, L_2, \dots, L_m) et, par suite aussi, dans le système donné (G_1, G_2, \dots, G_m) . Il est cependant bien évident que $(L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1})$ n'est pas contenu dans le système donné au même titre que R_1 ou que (L_1, L_2, \dots, L_m) . C'est pourquoi, comme $(L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1})$ est équivalent au système $(\sigma'_{21}, \sigma'_{22}, \dots, \sigma'_{2v_2})$, ou encore au système dont les éléments ont, comme plus grand commun diviseur *de rang un*, le résolvant R_3 *de rang trois*, nous dirons que $(L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1})$ ainsi que tous ses équivalents sont *diviseurs de rang trois* du système (G_1, G_2, \dots, G_m) . Ainsi de suite. En général nous dirons que le rang d'un système de modules contenu dans un autre système de modules est égal au rang de celui des résolvants du système contenant que l'on rencontre le premier en partant du système contenu et en formant aussi ses résolvants. Bien entendu, il est absolument nécessaire de tenir compte des résolvants qui se réduisent à l'unité.

Pour être conséquent nous devons aussi dire que le système $(L'_1, L'_2, \dots, L'_{m_1})$, par exemple, qui est diviseur de rang trois de (G_1, G_2, \dots, G_m) , est diviseur de rang deux du système (L_1, L_2, \dots, L_m) à condition de considérer chacun des éléments du premier système comme une fonction des $(n-1)$ variables $x'', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-2}$, et chacun des éléments du dernier système comme une fonction des n variables $x', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$. En général nous devons dire que le système

$$(L_1^{(h)}, L_2^{(h)}, \dots, L_{m_h}^{(h)})$$

est diviseur de rang $(i+1)$ du système

$$(L_1^{(h-i)}, L_2^{(h-i)}, \dots, L_{m_{h-i}}^{(h-i)}),$$

chaque élément $L^{(h)}$ étant considéré comme une fonction des $(n-h)$ variables $x^{(h-1)}, x_1^{(h-1)}, \dots, x_{n-h-1}^{(h-1)}$ et chaque élément $L^{(h-i)}$ comme une fonction des $(n-h+i)$ variables $x^{(h-i+1)}, x_1^{(h-i+1)}, \dots, x_{n-h+i-1}^{(h-i+1)}$; ainsi, lorsque deux systèmes sont divisibles l'un par l'autre, leur rang de divisibilité moins 1, sera donné par la différence de l'ordre des variétés représentées par les éléments de l'un des systèmes et par ceux de l'autre. En un mot, le rang est relatif à la variabilité donnée; il est égal à la diminution du nombre des variables $+1$, par une condensation de ces variables, à l'aide des indéterminées u, v, \dots, w .

Il me reste à faire une remarque importante sur la généralisation de l'idée de contenant et de contenu que nous avons été amenés à donner dans ce paragraphe. En disant que les formes E considérées étaient *primitives*, je me suis conformé au langage habituel et j'ai entendu par forme primitive une forme dont tous les coefficients n'ont pas de diviseur commun. Maintenant que nous avons introduit la notion de diviseur d'un rang quelconque, il faut distinguer; j'adopterai à cet effet, la terminologie de GAUSS et j'entendrai par *forme proprement primitive* une forme dont tous les coefficients n'ont aucun diviseur commun d'un rang quelconque. Or rien ne nous dit que les coefficients des formes E considérées n'ont aucun diviseur commun de rang supérieur au premier; nous savons au contraire que des fonctions de deux variables déjà, sans diviseur commun de rang un, peuvent s'annuler pour des valeurs particulières données à ces variables. Il en résulte que ces formes E ne sont en général pas proprement primi-

tives, mais seulement *improprement primitives*, et que les équivalences, et par suite aussi la décomposition, obtenues ne doivent être considérées que comme des *équivalences impropres* et une *décomposition impropre*, c'est à dire telle que chaque pas fait en avant se rapporte, non pas à tout l'ensemble de la décomposition, mais seulement *au rang* où l'on se trouve. C'est dans ce sens, et dans ce sens seulement, qu'il faut entendre l'équivalence du système (G_1, G_2, \dots, G_m) et de l'ensemble des fonctions R_1, R_2, \dots, R_{n+1} . Nous réserverons le symbole \sim au cas où les formes E sont proprement primitives.

Pour terminer, nous pouvons répéter, pour chaque rang plus grand que un , les raisonnements de la fin du paragraphe précédent. Nous sommes alors amenés à distinguer entre les systèmes décomposables et les systèmes impropres que nous avons exclus de nos recherches, au moins dans ce Mémoire. Pour compléter la théorie générale de la décomposition des systèmes, il reste à caractériser plus spécialement ces systèmes impropres dont M. KRONECKER a, le premier, donné un exemple.

CHAPITRE V.

Théorie générale de l'élimination.

§ 1.

De l'équation résolvante.

1. Le but que l'on se propose dans la théorie générale de l'élimination est de reconnaître la nature des restrictions apportées à la variabilité d'un nombre quelconque de quantités variables par un nombre également quelconque d'équations algébriques reliant ces quantités.

Dans la théorie de l'élimination proprement dite, on étudie de plus près les systèmes d'équations algébriques soumis à des conditions plus spéciales, particulièrement ceux où le nombre des équations est égal au nombre des variables.

Nous nous occuperons ici exclusivement de la théorie générale de l'élimination.

C'est DESCARTES qui, le premier, considéra la solution d'une équation $F(x) = 0$, comme la recherche des restrictions apportées à la variabilité de la quantité essentiellement variable x , par la condition déterminée $F(x) = 0$. Avant lui, on n'avait envisagé la résolution des équations que comme la recherche des valeurs qui, substituées aux inconnues, vérifient les équations données. Dans la théorie générale de l'élimination on néglige entièrement ce dernier point de vue et l'on se place à celui de DESCARTES en l'étendant à un nombre quelconque d'équations entre un nombre également quelconque de variables. Le mot éliminer n'a pas le sens de *laisser de côté*, mais au contraire, celui de *fixer, en les séparant*, les restrictions apportées à la variabilité de plusieurs variables, par des équations algébriques.

Soient donc

$$G_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

m équations algébriques reliant les n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Les coefficients des fonctions entières G_1, G_2, \dots, G_m font partie d'un domaine de rationalité donné sur lequel nous n'avons aucune prise. Nous avons prise au contraire sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n , et nous cherchons la nature des restrictions apportées à ces variables par les équations considérées. Comme le domaine de rationalité peut lui-même contenir autant de variables que l'on veut, le problème ainsi posé est plus général que si l'on se proposait de trouver la nature des restrictions apportées à toutes les variables paraissant dans les polynômes G_1, G_2, \dots, G_m , par les relations $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$.

Les restrictions dont nous parlons se distingueront tout d'abord par le plus ou moins de variabilité qu'elles laissent aux quantités x_1, x_2, \dots, x_n . Nous devons donc chercher, avant tout, à transformer le système d'équations

$$G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$$

en un autre qui, tout en lui étant équivalent, sépare nettement les différents degrés de variabilité que possèdent encore les quantités x_1, x_2, \dots, x_n .

L'analogie de ce problème et de celui dont nous avons exposé la solution dans le chapitre précédent est manifeste; la seule différence est, qu'au lieu d'un système de fonctions, nous considérons un système d'équations, et que, par suite, au lieu de la transformation du système (G_1, G_2, \dots, G_m) en R_1, R_2, \dots, R_n , nous obtenons celle du système d'équations

$$G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$$

en une seule équation

$$R_1.R_2.R_3 \dots R_n = 0,$$

l'équation résolvante du système.

En conservant les mêmes notations que dans la recherche précédente, nous voyons immédiatement que si les variables x_1, x_2, \dots, x_n sont liées par les relations

$$G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$$

il faut, ou bien que le résolvant R_1 soit nul, ou que nous ayons à la fois

$$L_1 = 0, L_2 = 0, \dots, L_m = 0.$$

Si ce dernier système d'équations est vérifié, il faut, ou bien que le résolvant R_2 soit nul, ou que nous ayons à la fois

$$L'_1 = 0, L'_2 = 0, \dots, L'_{m_1} = 0.$$

Ainsi de suite. Enfin, si le système

$$L_1^{(n-2)} = 0, L_2^{(n-2)} = 0, \dots, L_{m_{n-2}}^{(n-2)} = 0$$

est vérifié, il faut, ou bien que le résolvant R_n soit nul, ou que nous ayons à la fois

$$L_1^{(n-1)} = 0, L_2^{(n-1)} = 0, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-1)} = 0.$$

Cette dernière alternative est impossible, puisque les fonctions $L_1^{(n-1)}, L_2^{(n-1)}, \dots, L_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ de la seule variable $x^{(n)}$, sont sans diviseur commun.

Donc, si les équations

$$G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$$

sont vérifiées il faut que l'un des résolvants R_1, R_2, \dots, R_n s'annule. Inversement, si l'un de ces résolvants s'annule, nous avons à la fois

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad \dots, \quad G_m = 0.$$

Les restrictions apportées à la variabilité de x_1, x_2, \dots, x_n d'une part par le système d'équations

$$(G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad \dots, \quad G_m = 0)$$

et de l'autre par l'équation unique

$$R_1 R_2 \dots R_n = 0$$

sont donc absolument les mêmes.

Nous sommes ici dispensés de rechercher, comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, la nature de l'équivalence des systèmes $(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, \dots, L_{p_i}^{(i)})$ et de ceux dont les éléments sont les coefficients des formes S_k , ce qui simplifie considérablement le problème. Il n'y a plus d'équivalence propre ou impropre; l'équivalence indique tout simplement que les restrictions apportées à la variabilité de x_1, x_2, \dots, x_n par le système d'équations données et par son équation résolvante sont identiques; nous pouvons donc écrire

$$(G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad \dots, \quad G_m = 0) \sim (R_1 R_2 \dots R_n = 0).$$

De plus, le problème général de l'élimination peut toujours être résolu, tandis que nous avons vu que celui de l'équivalence des systèmes ne peut l'être complètement que si les différents résolvants n'ont pas de facteurs doubles. Il est vrai que cette restriction qui est, comme nous l'avons vu, dans la nature des choses, puisqu'il y a des systèmes non décomposables sans être irréductibles, a une fâcheuse influence sur la théorie générale de l'élimination. Elle nous empêche de tenir compte de l'ordre de multiplicité des solutions du problème. Ainsi, en appliquant la théorie de l'élimination à la géométrie, nous isolerons certainement toutes les surfaces, courbes et points donnés par un nombre quelconque d'équations entre trois variables x, y et z ; nous marquerons tous les points de l'espace dont les coordonnées vérifient simultanément les équations

données; mais si A sont ces surfaces, B ces courbes et C ces points, il se pourrait fort bien que les surfaces représentées par les équations données eussent, par exemple, outre les points C un point commun sur B , sans que nous obtenions autrement ce point que comme un des points de la courbe B .

Pour ne pas être obligé de changer de notations dans le courant de ce chapitre, nous désignerons tout de suite par R_h , non pas le plus grand commun diviseur des fonctions $K_1^{(h-1)}, K_2^{(h-1)}, \dots, K_{m_{h-1}}^{(h-1)}$, mais le quotient de ce plus grand commun diviseur et du plus grand commun diviseur qu'il a lui-même avec sa dérivée par rapport à $x^{(h)}$, de sorte que, si pour un instant R_h représente encore la fonction considérée jusqu'ici, notre nouvelle fonction R_h sera égale à

$$\frac{R_h}{Dx(R_h, D_{x^{(h)}}R_h)}$$

c'est à dire à l'ancienne fonction R_h débarassée de ses facteurs multiples. Comme nous ne pourrions tenir compte des solutions multiples, ce n'est pas une restriction que nous faisons là.

2. Dans ce qui va suivre, nous interpréterons chacune des expressions R_h indépendamment de toutes les autres, en recherchant de quelle manière *chacune* des équations $R_h = 0$ limite la variabilité de x_1, x_2, \dots, x_n . Nous pourrions donc supposer que les systèmes de variables que nous avons distingués en affectant les quantités x_1, x_2, \dots, x_n d'indices supérieurs soient tous les mêmes; cela revient simplement, géométriquement parlant, à interpréter chacune des équations $R_h = 0$ dans un autre système de coordonnées en nous réservant de choisir convenablement chacun de ces systèmes. Mais pour éviter toute confusion nous désignerons par

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

au lieu de x_1, x_2, \dots, x_n , les nouvelles variables considérées; ce sont des variables se rapportant à un système d'axes coordonnés mobiles. Nous désignerons de même par y la fonction linéaire à coefficients indéterminés

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n; \quad u_n = 1.$$

Nous aurons alors, dans le domaine de rationalité donné, l'équivalence

$$\begin{aligned} & [G_1(y_1, y_2, \dots, y_n); \dots; G_m(y_1, y_2, \dots, y_n)] \\ & \sim R_1(y, y_1, \dots, y_{n-1}, u_1, \dots, u_n) \\ & \times [H_1(y, y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n); \dots; H_{m_1}(y, y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n)]. \end{aligned}$$

En posant

$$y' = v_{n-1}y + v_1y_1 + \dots + v_{n-2}y_{n-2}; \quad v_{n-1} = 1$$

et en remplaçant y par sa valeur tirée de cette équation, il vient

$$\begin{aligned} & [H'_1(y, y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n); H'_2(y, y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n); \dots \\ & \dots; H'_{m_1}(y, y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n)] \\ & \sim [K'_1(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n); K'_2(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n); \dots \\ & \dots; K'_{m_1}(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n)] \\ & \sim R_2(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ & \times [L'_1(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n); \dots; L'_{m_1}(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n)]. \end{aligned}$$

Le résultant S_2 sera ensuite pris par rapport à y_{n-2} comme tout à l'heure par rapport à x_{n-2} , et ainsi de suite; mais, après avoir introduit chaque nouvelle fonction linéaire à coefficients indéterminés, $y^{(k)}$, c'est $y^{(k-1)}$, et non pas y_{n-k} par analogie avec x_{n-k} , qu'il faudra remplacer dans le système considéré par sa valeur tirée de cette relation.

D'ailleurs, en désignant par $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots$) de nouvelles indéterminées on a

$$y' = u'_1y_1 + u'_2y_2 + \dots + u'_{n-2}y_{n-2} + u_{n-1}y_{n-1} + u_ny_n$$

et, en général,

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= u_1^{(k)}y_1 + u_2^{(k)}y_2 + \dots + u_{n-k-1}^{(k)}y_{n-k-1} + u_{n-k}^{(k-1)}y_{n-k} + \dots \\ &\dots + u'_{n-2}y_{n-2} + u_{n-1}y_{n-1} + u_ny_n. \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots)$$

Nous obtenons ainsi l'équivalence

$$\begin{aligned} & [G_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0; G_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0; \dots; G_m(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0] \\ & \sim \left[\prod_{h=1}^n R_h(y^{(h-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, u_1, \dots, u_n, \dots, u_1^{(h-1)}, \dots, u_{n-h}^{(h-1)}) = 0 \right]. \end{aligned}$$

De ce que, les quantités $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}$ désignant toujours des indéterminées, l'équation résolvante $R_1 R_2 \dots R_n = 0$ est la conséquence nécessaire et suffisante du système d'équations $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$, nous allons déduire une transformation importante de cette résolvante qui nous fera clairement voir le rôle fondamental que jouent les indéterminées $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}$, dans la théorie générale de l'élimination.

A cet effet nous allons d'abord rechercher toutes les valeurs de chacune des variables y_1, y_2, \dots, y_n qui peuvent vérifier le système donné. Commençons par la variable y_n .

Les expressions $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ se transforment toutes en y_n , lorsque nous substituons aux quantités indéterminées $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, \dots, w_1$, la valeur zéro. Si donc nous répétons tous les raisonnements qui nous ont amené à la décomposition du système donné sans faire aucune substitution linéaire à coefficients indéterminés, ce qui revient à remplacer $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ par y_n , nous pourrions dire que le résultat obtenu est le même que tout à l'heure, à condition de substituer aux indéterminées les valeurs zéro, à l'exception de $u_{n-1}, v_{n-2}, \dots, w_2$, qui sont définies égales à l'unité. Nous obtiendrons ainsi l'équivalence

$$(G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0) \\ \sim \prod_{k=1}^n R_k^{(n)}(y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}; 0, 0, \dots, 1; \dots)$$

dans laquelle nous avons donné à R_k l'indice supérieur (n) pour indiquer que $y^{(k)}$, y est remplacé par y_n et que nous considérons spécialement cette expression comme une fonction de y_n . D'après ce que nous venons de dire $R_k^{(n)}$ sera le plus grand commun diviseur des coefficients du résultant $S_{k-1}^{(n)}$ des deux fonctions

$$\sum_{h=1}^{m_{k-2}} U_h L_h^{(k-2)}(y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}, y_{n-k+1}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots)$$

et

$$\sum_{h=1}^{m_{k-2}} V_h L_h^{(k-2)}(y_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}, y_{n-k+1}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots)$$

par rapport à la variable y_{n-k+1} , ce résultant étant considéré comme une fonction des indéterminées U et V .

Les racines de l'équation $R_k^{(n)} = 0$ sont fonctions algébriques de y_1, y_2, \dots, y_{n-k} ; soit $\gamma_n^{(k-1)}$ l'une quelconque d'entre elles. D'après ce que nous avons vu sur les propriétés du résultant, comme $S_{k-1}^{(n)}$ est nulle pour $y_n = \gamma_n^{(k-1)}$, les deux fonctions précédentes auront pour $y_n = \gamma_n^{(k-1)}$ un diviseur commun en y_{n-k+1} ; il y aura donc sûrement une valeur de y_{n-k+1} , $y_{n-k+1} = \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}$ telle que nous ayons à la fois

$$\sum_{h=1}^{m_{k-2}} U_h I_h^{(k-2)}(\gamma_n^{(k-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}, \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots) = 0$$

et

$$\sum_{h=1}^{m_{k-1}} V_h I_h^{(k-2)}(\gamma_n^{(k-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}, \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots) = 0$$

et, par suite, simultanément

$$L_h^{(k-2)}(\gamma_n^{(k-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}, \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots) = 0$$

($h=1, 2, \dots, m_{k-2}$)

comme nous nous en assurons facilement en considérant un nombre assez grand de systèmes d'indéterminées U et V auxquels correspondent, il est vrai, des résultants $S_{k-1}^{(n)}$ différents, mais cependant la même fonction $R_k^{(n)}$.

Puisque toutes les fonctions $L_h^{(k-2)}$ sont nulles pour $y_n = \gamma_n^{(k-1)}$ et $y_{n-k+1} = \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}$ il en sera de même du résultant $S_{k-2}^{(n)}$ des deux fonctions

$$\sum_{h=1}^{m_{k-3}} U_h L_h^{(k-3)}(\gamma_n^{(k-1)}, y_1, y_2, \dots, \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}, y_{n-k+2}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots)$$

et

$$\sum_{h=1}^{m_{k-3}} V_h L_h^{(k-3)}(\gamma_n^{(k-1)}, y_1, y_2, \dots, \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}, y_{n-k+2}; 0, 0, \dots, 1; 0, \dots)$$

qui est pris par rapport à y_{n-k+2} ; car $K_h^{(k-2)} = R_{k-1} L_h^{(k-2)}$ et les systèmes désignés plus haut par $(s_{k-2}, s_{k-2}', \dots)$, $(H_1^{(k-2)}, H_2^{(k-2)}, \dots)$, et $(K_1^{(k-2)}, K_2^{(k-2)}, \dots)$ sont ici identiques. De ce que $S_{k-2}^{(n)}$ est nul pour $y_n = \gamma_n^{(k-1)}$ et $y_{n-k+1} = \gamma_{n-k+1}^{(k-1)}$, nous concluons comme tout à l'heure qu'il y a sûrement une valeur de y_{n-k+2} ,

$$y_{n-k+2} = \gamma_{n-k+2}^{(k-1)}$$

Ceci a lieu pour $k = 1, 2, \dots, n$. Ainsi à chaque racine $y_n = \gamma_n$ de chacune des équations $R_1^{(n)} = 0, R_2^{(n)} = 0, \dots, R_n^{(n)} = 0$, correspondent respectivement des valeurs de $0, 1, \dots, (n-1)$ des autres variables qui, jointes à γ_n elle-même, vérifient simultanément les équations données. Nous obtenons donc des variétés différentes satisfaisant au problème, suivant la résolvante $R_i = 0$ dont nous considérons les racines après avoir substitué aux *indéterminées* la valeur zéro.

Inversement si ζ_n est une valeur de y_n qui permette de vérifier simultanément les équations $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$, il faut que, ou bien $R_1^{(n)}$ soit nul pour $y_n = \zeta_n$, c'est à dire que ζ_n soit égale à l'une des racines γ_n précédemment définies, ou bien que toutes les équations

$$L_h(\zeta_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-2}; 0, 0, \dots, 1) = 0 \quad (h=1, 2, \dots, m),$$

soient vérifiées. Dans ce dernier cas le résultant $S_1^{(n)}$ s'annule pour $y_n = \zeta_n$; donc, ou bien $R_2^{(n)}(\zeta_n) = 0$ et alors ζ_n est égale à l'une des γ'_n auxquelles correspondent, dans notre notation, des valeurs de y_{n-1} , $y_{n-1} = \gamma'_{n-1}$ telles que

$$G_h(y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, \gamma'_{n-1}, \gamma'_n) = 0 \quad (h=1, 2, \dots, m)$$

ou bien toutes les équations

$$L'_h(\zeta_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-2}; 0, 0, \dots, 1; 0, 0, \dots, 1) = 0$$

sont vérifiées. Ainsi de suite. Enfin, ou bien $R_n^{(n)}$ s'annule pour $y_n = \zeta_n$ et alors ζ_n est égale à l'une des racines $\gamma_n^{(n-1)}$ auxquelles correspondent des solutions

$$\gamma_1^{(n-1)}, \gamma_2^{(n-1)}, \dots, \gamma_{n-1}^{(n-1)}$$

telles que

$$G_h(\gamma_1^{(n-1)}, \gamma_2^{(n-1)}, \dots, \gamma_{n-1}^{(n-1)}, \gamma_n^{(n-1)}) = 0, \quad (h=1, 2, \dots, m)$$

ou bien toutes les fonctions

$$L_h^{(n-1)}(y_n; 0, 0, \dots, 1; \dots; 0, 1) \quad (h=1, 2, \dots, m_{n-1})$$

s'annulent pour $y_n = \zeta_n$. Ces fonctions étant sans diviseur commun, cette dernière alternative est impossible. Donc toutes les valeurs de y_n pour

lesquelles les équations $G_k = 0$, ($k = 1, 2, \dots, m$) peuvent être vérifiées simultanément sont nécessairement racines d'une des équations $R_k^{(n)} = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$).

Si nous n'avions pas simplifié l'écriture en considérant les variables y au lieu des variables x , rien ne serait changé au raisonnement lui-même, comme on s'en assure facilement; les variétés obtenues seraient du même ordre; seulement l'énoncé de chaque transformation serait beaucoup plus long, puisque toujours des fonctions linéaires, à coefficients entiers, des éléments considérés remplaceraient chacun de ces éléments.

Pour trouver de même toutes les valeurs de la variable y_{n-i} , [$i = 1, 2, \dots, (n-1)$] pouvant vérifier simultanément les équations $G_k = 0$, ($k = 1, 2, \dots, m$), nous opérons d'une façon tout à fait analogue. Seulement au lieu de substituer à toutes les indéterminées $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, \dots, w_1$, la valeur zéro, nous accepterons u_{n-i} que nous remplacerons par l'unité. Alors toutes les expressions $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ seront remplacés par $y_{n-i} + y_n$; nous considérerons tous les résultants comme fonctions de cette variable, $y_{n-i} + y_n$, ce que nous indiquerons en les affectant de l'indice supérieur $(n-i)$. Sauf cet indice supérieur rien n'est changé au raisonnement précédent. Donc, toutes les valeurs de y_{n-i} qui vérifient simultanément les équations $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$ sont nécessairement telles que $y_{n-i} + y_n$ soit racine de l'une des équations $R_k^{(n-i)} = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$). En rapprochant ce résultat du précédent nous obtenons toutes les valeurs cherchées de y_{n-i} ; elles sont fonctions algébriques d'un nombre de variables indépendantes qui dépend de l'indice k de la fonction $R_k^{(n-i)}$ dont $y_{n-i} + y_n$ est racine. Tout ceci a lieu pour $i = 1, 2, \dots, (n-1)$.

En résumé, tous les systèmes de valeurs qui vérifient simultanément les équations

$$G_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, G_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \dots, G_m(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0,$$

se composent 1° de fonctions algébriques d'un certain nombre de variables y_1, y_2, \dots, y_n et des éléments du domaine de rationalité donné; 2° de ces variables elles-mêmes qui restent indépendantes. Les fonctions algébriques dont nous parlons sont toutes comprises parmi les racines des équations

$$R_k^{(n-i)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

de manière qu'à chaque valeur de i corresponde spécialement un des indices de y . Le nombre de variables restant indépendantes dépend de l'indice k ; il est toujours égal à $n - k$, de sorte que pour $k = n$, il est nul.

3. C'est ainsi que l'on peut trouver sans aucun artifice tous les systèmes possibles vérifiant simultanément les équations

$$G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0.$$

Mais ces systèmes se présentent sans aucun ordre et les solutions obtenues ne nous donnent, par suite, aucune vue sérieuse sur les restrictions apportées par les équations $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$ à la variabilité des quantités essentiellement variables y_1, y_2, \dots, y_n . Or c'est précisément dans l'étude de ces restrictions que consiste la théorie générale de l'élimination. Il nous faut donc chercher une autre solution et c'est ici que les quantités indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n viennent s'imposer tout naturellement à notre attention.

Le résultat obtenu jusqu'ici n'est cependant pas inutile. Il était au contraire nécessaire de l'obtenir tout d'abord et nous en ferons usage dans un instant.

Reprenons tout à fait le même raisonnement que tout à l'heure; mais en faisant cette fois-ci, comme il a été indiqué plus haut, les substitutions linéaires à coefficients indéterminés.

Considérons chaque résolvant R_h , ($h = 1, 2, \dots, n$) que nous obtenons ainsi comme une fonction de $y^{(h-1)}$ seulement ce qui revient à joindre les autres variables y_1, y_2, \dots, y_{n-h} , au domaine de rationalité donné. Soit alors $\gamma^{(h-1)}$ une quelconque des racines de l'équation $R_h = 0$. Nous allons démontrer qu'à chaque valeur $\gamma^{(h-1)}$ correspondent des valeurs de

$$y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-h-1}$$

qui sont fonctions algébriques de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} , et vérifient simultanément les équations $G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$.

Comme, par définition,

$$R_h(\gamma^{(h-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h}; u_1, u_2, \dots, u_n; u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-2}; \dots; u_1^{(h-1)}, u_2^{(h-1)}, \dots, u_{n-h}^{(h-1)}) = 0$$

nous avons aussi

$$K_i^{(h-1)}(\gamma^{(h-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h}; u_1, u_2, \dots, u_n; u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-2}; \dots \\ \dots; u_1^{(h-1)}, u_2^{(h-1)}, \dots, u_{n-h}^{(h-1)}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m_{h-1})$$

donc

$$S_i^{(h-1)}(\gamma^{(h-1)} - t_1^{(h-1)}y_1 - t_2^{(h-1)}y_2 - \dots - t_{n-h}^{(h-1)}y_{n-h}; y_1, y_2, \dots, y_{n-h}; \\ u_1, \dots, u_n; u'_1, \dots, u'_{n-2}; \dots; u_1^{(h-2)}, u_2^{(h-2)}, \dots, u_{n-h+1}^{(h-2)}) = 0 \\ (i=1, 2, \dots, m_{h-1})$$

et, par suite

$$S_{h-1}(\gamma^{(h-1)} - t_1^{(h-1)}y_1 - t_2^{(h-1)}y_2 - \dots - t_{n-h}^{(h-1)}y_{n-h}; y_1, y_2, \dots, y_{n-h}; \\ u_1, \dots, u_n; u'_1, \dots, u'_{n-2}; \dots; u_1^{(h-2)}, u_2^{(h-2)}, \dots, u_{n-h+1}^{(h-2)}, U^{(k)}, V^{(k)}) = 0$$

quel que soit l'indice k des indéterminées U et V .

Mais alors, d'après la propriété fondamentale des résultants, les deux fonctions

$$\sum_{i=1}^{m_{h-2}} [U_i^{(k)} L_i^{(h-2)}(\gamma^{(h-2)}, y_1, \dots, y_{n-h+1}; u_1, \dots, u_n; u'_1, \dots, u'_{n-2}; \dots \\ \dots; u_1^{(h-2)}, u_2^{(h-2)}, \dots, u_{n-h+1}^{(h-2)})]$$

et

$$\sum_{i=1}^{m_{h-2}} [V_i^{(k)} L_i^{(h-2)}(\gamma^{(h-2)}, y_1, \dots, y_{n-h+1}; u_1, \dots, u_n; u'_1, \dots, u'_{n-2}; \dots \\ \dots; u_1^{(h-2)}, u_2^{(h-2)}, \dots, u_{n-h+1}^{(h-2)})]$$

dont S_{h-1} est le résultant pris par rapport à y_{n-h+1} , auront pour

$$\gamma^{(h-2)} = \gamma^{(h-1)} - t_1^{(h-1)}y_1 - t_2^{(h-1)}y_2 - \dots - t_{n-h}^{(h-1)}y_{n-h}$$

un diviseur commun en y_{n-h+1} ; il y aura donc sûrement une valeur de y_{n-h+1}

$$y_{n-h+1} = \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}$$

S_{h-2} est le résultant, par rapport à y_{n-h+2} des deux fonctions

$$\sum_{i=1}^{m_{h-3}} [U_i^{(h)} L_i^{(h-3)}(y^{(h-3)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h+2}, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_{n-2}, \dots, u_1^{(h-3)}, \dots, u_{n-h+2}^{(h-3)})]$$

$$\sum_{i=1}^{m_{h-3}} [V_i^{(h)} L_i^{(h-3)}(y^{(h-3)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h+2}, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_{n-2}, \dots, u_1^{(h-3)}, \dots, u_{n-h+2}^{(h-3)})].$$

Ces deux fonctions s'annuleront donc simultanément pour une valeur au moins de y_{n-h+2}

$$y_{n-h+2} = \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}$$

$y^{(h-1)}$ et y_{n-h+1} étant respectivement égales à $\gamma^{(h-1)}$ et $\gamma_{n-h+1}^{(h-1)}$.

En continuant ainsi nous arrivons au résultant S_1 et nous trouvons des systèmes

$$\gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-2}^{(h-1)}$$

vérifiant l'égalité

$$S_1(\gamma^{(h-1)} - t'_1 y_1 - t'_2 y_2 - \dots - t'_{n-h} y_{n-h} - t'_{n-h+1} \gamma_{n-h+1}^{(h-1)} - \dots - t'_{n-2} \gamma_{n-2}^{(h-1)},$$

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-2}^{(h-1)}, u_1, \dots, u_n, U^{(k)}, V^{(k)}) = 0;$$

S_1 est le résultant, pris par rapport à y_{n-1} , des deux fonctions

$$\sum_{i=1}^m U_i^{(k)} L_i(y, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}; u_1, \dots, u_n)$$

$$\sum_{i=1}^m V_i^{(k)} L_i(y, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}; u_1, \dots, u_n).$$

Ces deux fonctions s'annuleront donc simultanément pour une valeur au moins de y_{n-1}

$$y_{n-1} = \gamma_{n-1}^{(h-1)}$$

à condition que

$$y_{n-h+1}, y_{n-h+2}, \dots, y_{n-2}$$

soient déjà remplacées par leurs valeurs respectives

$$\gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-2}^{(h-1)}.$$

Nous en concluons que les équations

$$L_i(\gamma^{(h-1)} - t'_1 y_1 - t'_2 y_2 - \dots - t'_{n-h} y_{n-h} - t'_{n-h+1} \gamma_{n-h+1}^{(h-1)} - \dots - t'_{n-2} \gamma_{n-2}^{(h-1)}, \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-2}^{(h-1)}, \gamma_{n-1}^{(h-1)}, u_1, \dots, u_n) = 0$$

sont vérifiées simultanément, et que, par suite, les fonctions

$$K_i(y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

s'annulent simultanément pour

$$y = \gamma^{(h-1)} - t'_1 y_1 - t'_2 y_2 - \dots - t'_{n-2} y_{n-2}; \\ y_{n-h+1} = \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}; y_{n-h+2} = \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}; \dots; y_{n-1} = \gamma_{n-1}^{(h-1)}.$$

Mais

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_{n-1} y_{n-1} + u_n y_n,$$

et, en faisant cette substitution, les fonctions K_i se transforment en G_i , ($i = 1, 2, \dots, m$). Nous avons donc aussi

$$G_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

pour

$$y_{n-h+1} = \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, y_{n-h+2} = \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, y_{n-1} = \gamma_{n-1}^{(h-1)},$$

et

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_{n-1} y_{n-1} + y_n = \gamma^{(h-1)} - t'_1 y_1 - t'_2 y_2 - \dots - t'_{n-2} y_{n-2},$$

c'est à dire

$$y_n = \gamma^{(h-1)} - t_1 y_1 - t_2 y_2 - \dots - t_{n-h} y_{n-h} - t_{n-h+1} \gamma_{n-h+1}^{(h-1)} - t_{n-h+2} \gamma_{n-h+2}^{(h-1)} - \dots \\ \dots - t_{n-1} \gamma_{n-1}^{(h-1)}; \quad t_{n-1} = u_{n-1}.$$

En désignant cette valeur de y_n qui est, comme γ_{n-h+1} , γ_{n-h+2} , ..., et γ_{n-1} , fonction algébrique de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} , par $\gamma_n^{(h-1)}$, nous pouvons aussi énoncer le résultat obtenu en disant que pour

$$y^{(h-1)} = t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots + t_{n-h} y_{n-h} + t_{n-h+1} \gamma_{n-h+1}^{(h-1)} + t_{n-h+2} \gamma_{n-h+2}^{(h-1)} + \dots \\ \dots + t_{n-1} \gamma_{n-1}^{(h-1)} + t_n \gamma_n^{(h-1)}$$

le résolvant

$$R_h(y^{(h-1)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, u_1, \dots, u_n, \dots, u_1^{(h-1)}, \dots, u_{n-h}^{(h-1)})$$

s'annule, tandis que les équations

$$G_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_n^{(h-1)}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

sont vérifiées simultanément.

Mais nous avons vu, plus haut, que, pour y_1, y_2, \dots, y_{n-h} variables, toutes les valeurs $\gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_n^{(h-1)}$ vérifiant simultanément les équations

$$G_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_n^{(h-1)}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

sont telles que $\gamma_{n-h+1}^{(h-1)} + \gamma_n^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)} + \gamma_n^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-1}^{(h-1)} + \gamma_n^{(h-1)}$ et $\gamma_n^{(h-1)}$ vérifient respectivement les équations

$$R_h^{(n-h+1)} = 0, R_h^{(n-h+2)} = 0, \dots, R_h^{(n-1)} = 0, R_h^{(n)} = 0;$$

toutes ces valeurs $\gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-1}^{(h-1)}, \gamma_n^{(h-1)}$, sont, par suite, *indépendantes* des indéterminées u_1, \dots considérées, et seulement fonctions algébriques de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} . Tout ceci a lieu pour $h = 1, 2, \dots, n$.

D'autre part, comme l'équation résolvante

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \dots R_n = 0$$

représente exactement les mêmes restrictions apportées à la variabilité de y_1, y_2, \dots, y_n que les équations

$$G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0$$

chaque système vérifiant simultanément les équations données, doit aussi vérifier l'une ou l'autre des résolvantes $R_h = 0$, ($h = 1, 2, \dots, n$).

Donc les systèmes $\gamma_{n-h+1}^{(h-1)}, \gamma_{n-h+2}^{(h-1)}, \dots, \gamma_{n-1}^{(h-1)}, \gamma_n^{(h-1)}$, correspondant à chacune des racines $\gamma^{(h-1)}$ de l'équation $R_h = 0$, pour $h = 1, 2, \dots, n$,

et ces systèmes seulement, vérifient simultanément les équations $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, ..., $G_m = 0$. De plus, nous savons maintenant que les éléments de ces systèmes ne sont pas fonctions algébriques des variables qui restent indépendantes et des indéterminées introduites pour résoudre plus symétriquement le problème proposé, mais sont, au contraire, seulement fonctions algébriques des variables qui restent indépendantes.

Nous avons ainsi, comme tout à l'heure, trouvé *toutes* les valeurs de y_1, y_2, \dots, y_n vérifiant les équations proposées. Mais tandis que sans l'emploi des indéterminées nous ne savions pas comment ces valeurs se groupaient en systèmes, nous obtenons, à l'aide des indéterminées, simultanément les valeurs correspondantes de y_1, y_2, \dots, y_n . Elles nous sont données toutes à la fois par les racines des équations résolvantes $R_h = 0$. A chacune de ces équations répond un nombre différent de variables qui restent indépendantes et, par suite, une variété différente vérifiant le système proposé.

Comme les résolvantes peuvent être mises sous la forme

$$R_1(y, y_1, \dots, y_{n-1}, u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{(i)} (y - \gamma_{0i}) \\ = \prod_{(i)} (y - u_1 y_1 - u_2 y_2 - \dots - u_{n-1} y_{n-1} - u_n \gamma_{ni}) = 0$$

$$R_2(y', y_1, \dots, y_{n-2}, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_{n-2}) = \prod_{(i)} (y' - \gamma'_{0i}) \\ = \prod_{(i)} (y' - u'_1 y_1 - u'_2 y_2 - \dots - u'_{n-2} y_{n-2} - u_{n-1} \gamma'_{n-1,i} - u_n \gamma'_{ni}) = 0$$

et, en général, comme

$$R_h(y^{(h-1)}, y_1, \dots, y_{n-h}, u_1, \dots, u_n, \dots, u_1^{(h-1)}, \dots, u_{n-h}^{(h-1)}) = \prod_{(i)} (y^{(h-1)} - \gamma_{0i}^{(h-1)}) \\ = \prod_{(i)} (y^{(h-1)} - u_1^{(h-1)} y_1 - \dots - u_{n-h}^{(h-1)} y_{n-h} - u_{n-h+1}^{(h-2)} \gamma_{n-h+1,i}^{(h-1)} - \dots - u_n \gamma_{ni}^{(h-1)}) = 0 \\ (h = 1, 2, \dots, n).$$

nous voyons que chacune de ces résolvantes dépend, au plus, de n indéterminées. Dans toutes les fonctions réunies R_1, R_2, \dots, R_n ne paraissent même que les n indéterminées $u_1^{(n-2)}, u_2^{(n-3)}, \dots, u'_{n-2}, u_{n-1}, u_n$; on pourrait donc, dès le début, n'introduire qu'un seul système d'indé-

terminées, au lieu de $(n - 1)$ systèmes; cependant je crois plus naturel d'opérer comme je l'ai fait.

Nous voyons aussi que, considérée comme une fonction des indéterminées qui y paraissent, la forme R_h est décomposable en facteurs linéaires dont les coefficients sont fonctions algébriques de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} seulement. Nous allons, dans un instant, faire usage de ce résultat important.

En résumé, si l'on nous donne un système quelconque d'équations algébriques reliant un nombre également quelconque de variables et si l'on nous demande de déterminer les différentes variétés vérifiant ce système, nous formerons d'abord l'équation résolvante en égalant à zéro le résolvant total débarrassé de ses facteurs multiples. A chacune des résolvantes partielles correspond une variété d'ordre différent répondant au problème. Cet ordre de variété n'est pas représenté lorsque le résolvant correspondant est égal à l'unité. Dans le cas contraire, pour obtenir les systèmes composant cette variété, nous considérerons le résolvant partiel correspondant comme une fonction des n indéterminées qui y paraissent et nous le décomposerons en ses facteurs linéaires. Nous obtiendrons ainsi, en remplaçant dans l'expression précédente de R_h , $y^{(h-1)}$ par sa valeur $u_1^{(h-1)}y_1 + u_2^{(h-1)}y_2 + \dots + u_{n-1}y_{n-1} + u_n y_n$

$$R_h(y^{(h-1)}, y_1, \dots, y_{n-h}, u_1^{(h-1)}, \dots, u_n)$$

$$= \prod_{(i)} \{u_{n-h+1}^{(h-2)}(y_{n-h+1} - \gamma_{n-h+1,i}^{(h-1)}) + u_{n-h+2}^{(h-3)}(y_{n-h+2} - \gamma_{n-h+2,i}^{(h-1)}) + \dots + u_n(y_n - \gamma_{n,i}^{(h-1)})\} = 0.$$

Pour chaque valeur déterminée de i , nous avons donc

$$u_{n-h+1}^{(h-2)}(y_{n-h+1} - \gamma_{n-h+1,i}^{(h-1)}) + u_{n-h+2}^{(h-3)}(y_{n-h+2} - \gamma_{n-h+2,i}^{(h-1)}) + \dots + u_n(y_n - \gamma_{n,i}^{(h-1)}) = 0$$

et comme les u sont indéterminées

$$y_{n-h+1} = \gamma_{n-h+1,i}^{(h-1)}, \quad y_{n-h+2} = \gamma_{n-h+2,i}^{(h-1)}; \dots; y_n = \gamma_{n,i}^{(h-1)}.$$

Toutes ces expressions sont fonctions algébriques de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} . Celles qui correspondent à une même valeur de i , vérifient simultanément les équations données, y_1, y_2, \dots, y_{n-h} restant indéterminées.

En donnant à h successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$, nous obtenons

tous les systèmes vérifiant les équations données, et simultanément les valeurs correspondantes des éléments de ces systèmes.

§ 2.

De la représentation générale des systèmes d'équations.

Nous allons maintenant considérer séparément chacun des résolvants R_1, R_2, \dots, R_n . Il n'y aura donc aucun inconvénient à laisser aussi de côté, pour simplifier l'écriture, les indices supérieurs de toutes les variables et des indéterminées.

La décomposition en ses facteurs linéaires du résolvant R_h considéré comme une fonction des indéterminées u , a lieu identiquement en ces indéterminées; dans chaque facteur linéaire les coefficients ne dépendent pas des u ; nous pouvons donc écrire en substituant à u_1, u_2, \dots, u_n , des quantités variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\begin{aligned} R_h(y, y_1, \dots, y_{n-h}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ = \prod_{i=1}^{\rho} (y - \eta_{0,i}) = \prod_{i=1}^{\rho} (y - \lambda_1 y_1 - \dots - \lambda_{n-h} y_{n-h} - \lambda_{n-h+1} \eta_{n-h+1,i} - \dots - \lambda_n \eta_{n,i}). \end{aligned}$$

Pour une valeur déterminée de k comprise entre 0 et $(h-1)$ nous aurons également, en désignant par α une variable auxiliaire

$$\begin{aligned} R_h(y, y_1, \dots, y_{n-h}; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k-1}, \lambda_{n-k} + \alpha, \lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_n) \\ = \prod_{i=1}^{\rho} (y - \eta_{0,i} - \alpha \eta_{n-k,i}) \end{aligned}$$

et pour une valeur déterminée de i , $i=j$, c'est à dire pour une racine déterminée $\eta_{0,j}$ de l'équation $R_h(y) = 0$

$$R_h(y - \eta_{0,j}, y_1, \dots, y_{n-h}; 0, 0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^{\rho} (y - \eta_{0,j} - \alpha \eta_{n-k,i})$$

la variable α étant au milieu des zéros à la place qu'occupait dans l'égalité précédente $\lambda_{n-k} + \alpha$.

Les deux produits

$$\prod_{i=1}^p (y - \eta_{0,i} - \alpha \eta_{n-k,i}) \text{ et } \prod_{i=1}^p (y - \eta_{0,j} - \alpha \eta_{n-k,i})$$

ont un facteur commun $y - \eta_{0,j} - \alpha \eta_{n-k,j}$, c'est à dire

$$y - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 - \dots - \lambda_{n-h} y_{n-h} - \lambda_{n-h+1} \eta_{n-h+1,j} - \dots \\ \dots - \lambda_{n-k-1} \eta_{n-k-1,j} - (\lambda_{n-k} + \alpha) \eta_{n-k,j} - \lambda_{n-k+1} \eta_{n-k+1,j} - \dots - \lambda_n \eta_{n,j}.$$

Ils n'en ont point d'autres aussi longtemps que les variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ restent indéterminées. Nous pouvons donc toujours⁽¹⁾ trouver des entiers p_1, p_2, \dots, p_n tels que

$$y - p_1 y_1 - p_2 y_2 - \dots - p_{n-h} y_{n-h} - p_{n-h+1} \eta_{n-h+1,j} - \dots \\ \dots - p_{n-k-1} \eta_{n-k-1,j} - (p_{n-k} + \alpha) \eta_{n-k,j} - p_{n-k+1} \eta_{n-k+1,j} - \dots - p_n \eta_{n,j}$$

soit le plus grand commun diviseur des deux fonctions

$$R_h(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1, \dots, p_{n-k-1}, p_{n-k} + \alpha, p_{n-k+1}, \dots, p_n)$$

et

$$R_h(y - \zeta_{0,j}, y_1, \dots, y_{n-h}, 0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0)$$

où $\zeta_{0,j}$ désigne ce que devient $\eta_{0,j}$ pour les valeurs particulières

$$\lambda_1 = p_1, \quad \lambda_2 = p_2, \quad \dots, \quad \lambda_n = p_n$$

c'est à dire une des ρ racines de l'équation

$$R_h(y; y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Ni $\eta_{n,i}$ qui est racine de l'équation $R_h^{(n)} = 0$, ni $\eta_{n-k,i} + \eta_{n,i}$ qui est racine de l'équation $R_h^{(n-k)} = 0$, ne dépendent de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; les $\eta_{n-k,i}$ ne

⁽¹⁾ Comparez page 39.

changent donc pas pour les valeurs particulières p_1, p_2, \dots, p_n données à ces variables.

La recherche du plus grand commun diviseur est une opération essentiellement rationnelle; l'expression

$$\zeta_{0,j} + \alpha \eta_{n-k,j}$$

est donc une fonction rationnelle des coefficients $\zeta_{0,j}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}, \alpha$ qui paraissent dans les deux fonctions précédentes. Ainsi en donnant à α une valeur convenable, $\eta_{n-k,j}$ est fonction rationnelle de $\zeta_{0,j}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}$;

$$\eta_{n-k,j} = f_{n-k}(\zeta_{0,j}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}).$$

Partageons maintenant les racines $\zeta_{0,j}$ en groupes correspondant aux facteurs irréductibles de $R_h = 0$. Soient

$$T_1, T_2, \dots, T_k$$

ces facteurs irréductibles, et

$$T_{h,\nu} = \prod_{(k)} (y - \zeta_{0,k}^{(\nu)}), \quad \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, p_\nu \\ \nu=1, 2, \dots, \tau \\ k=0, 1, \dots, (k-1) \end{pmatrix}$$

Comme toute fonction rationnelle qui s'annule pour l'une des racines d'une équation irréductible s'annule pour toutes les racines de cette équation nous obtiendrons la même fonction rationnelle f_{n-k} pour toutes les racines correspondant à la même valeur de ν ; nous devons donc écrire

$$\eta_{n-k,j}^{(\nu)} = f_{n-k}^{(\nu)}(\zeta_{0,j}^{(\nu)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-k}). \quad \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, p_\nu \\ \nu=1, 2, \dots, \tau \\ k=0, 1, \dots, (k-1) \end{pmatrix}$$

Une transformation déjà donnée par LAGRANGE nous permet ensuite de former facilement une fonction rationnelle qui reste la même non seulement pour toutes les racines de l'un quelconque des facteurs irréductibles de R_h , mais aussi pour toutes les racines de la fonction R_h elle-même. Nous voyons, en effet, qu'en posant

$$F_{n-k}(y, y_1, \dots, y_{n-k}) = \sum_{(\nu)} f_{n-k}^{(\nu)}(\zeta_{0,j}^{(\nu)}, y_1, \dots, y_{n-k}) \cdot \frac{\prod_{(\nu)} T_{h,\nu}(y) \cdot T_{h,i}(\zeta_{0,j}^{(\nu)})}{(y - \zeta_{0,j}^{(\nu)}) D_\nu T_{h,\nu}(y) \prod_{\nu \neq i} T_{h,\nu}(\zeta_{0,j}^{(\nu)})} \quad \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, \tau \\ i=1, 2, \dots, \tau \\ \nu=1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

nous avons à la fois

$$F_{n-k}(\zeta_{0,j}^{(i)}, y_1, \dots, y_{n-h}) = f_{n-k}^{(i)}(\zeta_{0,j}^{(i)}, y_1, \dots, y_{n-h})$$

pour $j = 1, 2, \dots, \rho_i$ et pour $i = 1, 2, \dots, \tau$, c'est à dire pour toutes les racines de l'équation $R_h = 0$.

Pour $y = \zeta_{0,1}^{(1)}$, par exemple, la fraction

$$\frac{T_{h,1}(\zeta_{0,1}^{(1)}) T_{h,2}(\zeta_{0,1}^{(1)}) \dots T_{h,\tau}(\zeta_{0,1}^{(1)})}{(\zeta_{0,1}^{(1)} - \zeta_{0,j}^{(1)}) D_y T_{h,1}(y)_{y=\zeta_{0,j}^{(1)}} T_{h,2}(\zeta_{0,j}^{(1)}) T_{h,3}(\zeta_{0,j}^{(1)}) \dots T_{h,\tau}(\zeta_{0,j}^{(1)})}$$

se réduit à l'unité pour $j = 1$, et à zéro pour $j = 2, 3, \dots, \rho_1$; tandis que pour $i > 1$, la fraction

$$\frac{T_{h,1}(\zeta_{0,1}^{(i)}) T_{h,2}(\zeta_{0,1}^{(i)}) \dots T_{h,\tau}(\zeta_{0,1}^{(i)})}{(\zeta_{0,1}^{(i)} - \zeta_{0,j}^{(i)}) D_y T_{h,i}(y)_{y=\zeta_{0,j}^{(i)}} T_{h,1}(\zeta_{0,j}^{(i)}) \dots T_{h,i-1}(\zeta_{0,j}^{(i)}) T_{h,i+1}(\zeta_{0,j}^{(i)}) \dots T_{h,\tau}(\zeta_{0,j}^{(i)})}$$

est nécessairement nulle.

Il en résulte que

$$F_{n-k}(\zeta_{0,1}^{(1)}, y_1, \dots, y_{n-h}) = f_{n-k}^{(1)}(\zeta_{0,1}^{(1)}, y_1, \dots, y_{n-h}).$$

De même pour les autres racines de l'équation $R_h = 0$.

Nous pouvons donc écrire, pour $j = 1, 2, \dots, \rho$ et $k = 0, 1, \dots, (h-1)$,

$$\eta_{n-k,j} = F_{n-k}(\zeta_{0,j}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h})$$

ou encore, en désignant par ϕ_{n-k} et ψ_{n-k} deux fonctions entières

$$\eta_{n-k,j} = \frac{\phi_{n-k}(\zeta_{0,j}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h})}{\psi_{n-k}(\zeta_{0,j}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h})}.$$

Ainsi pour chaque valeur déterminée de j , les expressions correspondantes

$$\eta_{n-h+1,j}, \eta_{n-h+2,j}, \dots, \eta_{n,j}$$

sont fonctions rationnelles de $\zeta_{0,j}$ et des variables arbitraires y_1, y_2, \dots, y_{n-h} , tandis que $\zeta_{0,j}$ est égale à l'une des racines de l'équation résolvante elle-même $R_h(y) = 0$, dans laquelle les indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n sont remplacées par les entiers p_1, p_2, \dots, p_n . Il est d'ailleurs indifférent de

tirer de cette dernière équation la valeur de y en fonction algébrique de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} , pour la substituer dans les fonctions $F_{n-k}(y, y_1, \dots, y_{n-h})$ comme nous venons de le faire, ou d'en tirer, par exemple, la valeur de y_1 en fonction algébrique de y, y_2, \dots, y_{n-h} pour la substituer dans ces mêmes fonctions $F_{n-k}(y, y_1, \dots, y_{n-h})$. De toute manière, le système

$$R_h(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

$$y_{n-k} = F_{n-k}(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (k=0, 1, 2, \dots, h-1)$$

nous donnera les mêmes solutions que l'équation résolvante

$$R_h(y, y_1, \dots, y_{n-h}, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0.$$

Une exception se présente toutefois lorsque la fonction rationnelle F_{n-k} est indéterminée. Dans ce cas, nous devons écrire, non pas l'égalité

$$y_{n-k} = F_{n-k}(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

qui n'a aucun sens, mais la suivante

$$y_{n-k} \psi_{n-k}(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1, p_2, \dots, p_n) = \phi(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

qui est alors vérifiée quelles que soient les valeurs données à y_{n-k} .

Si donc, pour mettre en évidence que les indéterminées u sont remplacées par les entiers p , nous posons

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n = z_0$$

et si, d'autre part, pour écrire plus symétriquement nos formules, nous convenons d'entendre par F_1, F_2, \dots, F_{n-h} les variables $y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_{n-h} = z_{n-h}$ elles-mêmes, de sorte que

$$y_i = z_i = F_i(z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-h}), \quad (i=1, 2, \dots, n-h)$$

nous pouvons dire que la résolvante de rang h , du système donné

$$[G_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, G_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \dots, G_m(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0]$$

est équivalente au système

$$(I) \quad \begin{cases} R_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) = 0 \\ y_k = F_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) \\ \prod_{(k)} \psi_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) \geq 0. \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

La première équation de ce système représente déjà une variété $(n-h)^{\text{ième}}$ prise dans la variété $(n-h+1)^{\text{ième}}$ qui est formée par les variables z_0, z_1, \dots, z_{n-h} . Les autres équations nous donnent les valeurs des n variables y_1, y_2, \dots, y_n , en fonctions rationnelles des éléments de la variété $(n-h)^{\text{ième}}$ dont nous venons de parler, pourvu que l'inégalité $\prod_{(k)} \psi_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) \geq 0$ soit vérifiée. C'est pourquoi nous pouvons aussi dire que la variété $(n-h)^{\text{ième}}$ prise dans la variété $(n-h+1)^{\text{ième}}$ formée par les variables z_0, z_1, \dots, z_{n-h} , et définie par le système (I) est une *figuration* de la variété $(n-h)^{\text{ième}}$ contenu dans le système donné.

Le système

$$\begin{aligned} R_h(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) &= 0 \\ y_k &= F_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

qui contient $(n+1)$ relations entre $(2n-h+1)$ variables, représente outre la variété $(n-h)^{\text{ième}}$

$$R_h(y, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_n) = 0$$

des variétés différentes répondant aux solutions où

$$\psi_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) = \psi_k^*(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) = 0$$

et où y_k est *indéterminée*. Il est donc tout à fait indispensable d'ajouter aux $(n+1)$ égalités précédentes, l'inégalité

$$\prod_{(k)} \psi_k(z_0, z_1, \dots, z_{n-h}) \geq 0$$

pour avoir une variété ne figurant que la variété considérée d'ordre $(n-h)$.

On peut toujours former une infinité de systèmes d'entiers $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}$, tels que

$$y - p_1^{(i)} y_1 - p_2^{(i)} y_2 - \dots - p_{n-h}^{(i)} y_{n-h} - p_{n-h+1}^{(i)} y_{n-h+1, j} - \dots \\ \dots - p_{n-k-1}^{(i)} y_{n-k-1, j} - (p_{n-k}^{(i)} + \alpha) y_{n-k, j} - p_{n-k+1}^{(i)} y_{n-k+1, j} - \dots - p_n^{(i)} y_{n, j}$$

soit le plus grand commun diviseur des deux fonctions

$$R_h(y, y_1, \dots, y_{n-h}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n-k-1}^{(i)}, p_{n-k}^{(i)} + \alpha, p_{n-k+1}^{(i)}, \dots, p_n^{(i)})$$

et

$$R_h(y - \xi_{0,j}^{(i)}, y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, 0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0)$$

où $\xi_{0,j}^{(i)}$ désigne une des racines de l'équation

$$R_h(y, y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}) = 0.$$

Si nous avons substitué aux indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n , un de ces systèmes $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}$, nous aurions obtenu une figuration différente de la variété $(n-h)^{\text{ième}}$ contenue dans le système d'équations

$$(G_1 = 0, G_2 = 0, \dots, G_m = 0):$$

Au lieu de $z_0 = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n$, nous aurions introduit une variable

$$z_0^{(i)} = p_1^{(i)} y_1 + p_2^{(i)} y_2 + \dots + p_n^{(i)} y_n$$

et nous aurions posé

$$y_k = z_k^{(i)} = F_k(z_0^{(i)}, z_1^{(i)}, \dots, z_{n-h}^{(i)}); \quad (k=1, 2, \dots, n-h)$$

alors la figuration cherchée se serait présentée sous la forme (I) tous les z étant affectés de l'indice supérieur i .

Mais les variables $z^{(i)}$ et y sont manifestement fonctions rationnelles les unes des autres, de même que les variables z et y . Les variables $z^{(i)}$ et z sont donc, elles-mêmes, *fonctions rationnelles les unes des autres*, ce que nous exprimerons en disant, d'après RIEMANN, que les équations $R_h(z_0^{(i)}, z_1^{(i)}, \dots, z_{n-h}^{(i)}) = 0$ font partie de la même classe. Il est indifférent de considérer l'un ou l'autre des individus d'une même classe. Parmi

ces individus sont nécessairement compris ceux que nous obtenons en soumettant les coefficients $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}$, à des équations de condition déterminées, pourvu que ces équations ne soient pas en contradiction avec l'inégalité à laquelle doivent satisfaire $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}$ et dont nous parlons plus haut; cette remarque peut être utile dans chaque cas particulier donné.

Le résultat obtenu est résumé dans la proposition suivante.

»Toute variété $k^{\text{ième}}$, prise dans une variété $n^{\text{ième}}$, peut être figurée par une variété $k^{\text{ième}}$, prise dans une variété $(k+1)^{\text{ième}}$, — par une variété dont le résolvant est, par suite, de rang un; — et cette dernière variété $k^{\text{ième}}$ peut être choisie arbitrairement parmi tous les individus faisant partie d'une classe déterminée.»

La figuration d'une variété quelconque, que nous venons de considérer, est tout à fait remarquable. Elle nous donne une vue plus complète sur les dépendances des solutions simultanées du problème, et met en évidence pourquoi finalement la notion de fonction algébrique donnée par un système de fonctions entières égalées à zéro, se réduit à celle donnée par une seule fonction entière égalée à zéro. Quoique cette figuration contienne une inégalité, elle a donc une grande importance. C'est pourquoi il semble bon de lui donner un nom. Je la nommerai *figuration principale* de la variété qu'elle représente.

§ 3.

De la réductibilité des systèmes de fonctions entières.

Nous allons maintenant chercher à résoudre le problème fondamental de la réductibilité des systèmes de fonctions entières.

Il faut avant tout définir ce que l'on veut entendre par système réductible ou irréductible. Comme un système d'équations est entièrement équivalent à sa résolvante, il est naturel, comme dans le cas de deux variables, de nommer réductible tout système d'équations dont le résolvant total se compose de plusieurs résolvants partiels, parce que ce système est

alors vérifié par plusieurs variétés différentes. Il est tout aussi naturel de nommer réductible un système dont le résolvant se compose d'un résolvant partiel qui est, lui-même, décomposable en facteurs dans le domaine de rationalité considéré. Au contraire, lorsque dans un domaine de rationalité donné, le résolvant d'un système ne se compose que d'un seul facteur irréductible, nous dirons que, dans ce domaine, le système est, lui aussi, irréductible.

Le premier théorème que nous démontrerons est tout à fait analogue à celui qui a lieu pour une fonction d'une variable, et légitime ainsi notre définition. Voici ce théorème.

Si une fonction rationnelle de y_1, y_2, \dots, y_n

$$\theta(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

s'annule pour un système quelconque de h fonctions algébriques $\gamma_{n-h+1}^{(1)}, \gamma_{n-h+2}^{(1)}, \dots, \gamma_n^{(1)}$ des variables y_1, y_2, \dots, y_{n-h} , vérifiant un système irréductible d'équations

$$G_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, G_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \dots, G_m(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0,$$

elle s'annule pour tous les autres systèmes de h fonctions algébriques $\gamma_{n-h+1}^{(i)}, \gamma_{n-h+2}^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)}$ de y_1, y_2, \dots, y_{n-h} ($i = 2, 3, \dots, \rho$) vérifiant ce même système d'équations.

En effet, comme le résolvant d'un système irréductible ne se compose que d'un seul facteur R_h , ce système de rang h peut être figuré par le suivant, de rang un ,

$$R_h(z_0, y_1, \dots, y_{n-h}) = 0$$

$$y_k = E_k(z_0, y_1, \dots, y_{n-h})$$

$$\prod_{(i)} \psi_k(z_0, y_1, \dots, y_{n-h}) \geq 0$$

où $R_h(z_0)$ s'annule pour toutes les valeurs de z_0

$$\zeta_0^{(i)} = p_1 y_1 + \dots + p_{n-h} y_{n-h} + p_{n-h+1} \gamma_{n-h+1}^{(i)} + \dots + p_n \gamma_n^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, \rho)$$

De plus, comme le résolvant d'un système irréductible doit être lui-même

irréductible, nous pourrions toujours déterminer les entiers p_1, p_2, \dots, p_n de manière que l'expression

$$R_h(z_0, y_1, \dots, y_{n-h})$$

soit, elle aussi, irréductible. Il va de soi que la condition du paragraphe précédent, que $R_h(z_0, z_1, \dots, z_{n-h})$ n'ait pas de facteurs doubles, est alors vérifiée d'elle-même.

Comme, par hypothèse,

$$\theta(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(1)}, \dots, \gamma_n^{(1)}) = 0$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned} & \theta(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, F_{n-h+1}(z_0^{(1)}, y_1, \dots, y_{n-h}), \dots, F_n(z_0^{(1)}, y_1, \dots, y_{n-h})) \\ &= H(z_0^{(1)}, y_1, \dots, y_{n-h}) = 0. \end{aligned}$$

Mais alors, y_1, y_2, \dots, y_{n-h} restant indéterminées, la fonction rationnelle de z_0

$$H(z_0; y_1, \dots, y_{n-h})$$

s'annule pour l'une des racines de l'équation irréductible $R_h(z_0) = 0$; d'après un théorème connu, elle s'annulera donc pour *toutes* les racines $z_0^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, \rho$) de cette équation, et nous aurons

$$\theta(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, F_{n-h+1}(z_0^{(i)}, y_1, \dots, y_{n-h}), \dots, F_n(z_0^{(i)}, y_1, \dots, y_{n-h})) = 0$$

pour $i = 1, 2, \dots, \rho$. Il en résulte immédiatement que la fonction rationnelle

$$\theta(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

s'annule pour tous les systèmes $y_{n-h+1} = \gamma_{n-h+1}^{(i)}, \dots, y_n = \gamma_n^{(i)}$, vérifiant le système irréductible d'équations

$$G_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, G_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \dots, G_m(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Inversement, si nous pouvons démontrer que *toute* fonction rationnelle qui s'annule pour un système de valeurs $(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(1)}, \dots, \gamma_n^{(1)})$, vérifiant un système d'équations données, s'annule également pour tous les autres systèmes de valeurs $(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}^{(i)}, \dots, \gamma_n^{(i)})$, véri-

fiant le même système d'équations, nous pouvons en conclure que ce système d'équations est irréductible.

Soit, en effet, $R = 0$, la résolvante de ce système. La fonction R s'annule pour $y_{n-h+1} = \gamma_{n-h+1}^{(i)}, \dots, y_n = \gamma_n^{(i)}$; si donc elle était réductible, et si $R = S.T$ il y aurait une équation $S = 0$, ou $T = 0$ qui étant vérifiée pour un système de valeurs $(y_1, y_2, \dots, y_{n-h}, \gamma_{n-h+1}, \dots, \gamma_n)$, ne le serait pas pour tous, contrairement à l'hypothèse. Ainsi l'équation $R = 0$, et, par suite, le système d'équations données est irréductible.

Cette propriété étant nécessaire et suffisante pourrait être donnée comme *définition* de l'irréductibilité d'un système d'équations.

Le problème de la décomposition d'un système d'équations quelconques en systèmes irréductibles peut être maintenant considéré comme résolu en même temps que posé. Soit, en effet, un système donné; nous commencerons par former sa résolvante $R = 0$; nous décomposerons ensuite, dans le domaine de rationalité arbitrairement fixé, la fonction R en ses facteurs irréductibles; à chacun de ces facteurs S_i , égalé à zéro, correspond un système d'équations bien facile à former. Il suffit de développer la fonction irréductible $S_i(y_1 y_1 + \dots + u_n y_n, y_1, \dots, y_{n-i}, u_1, \dots, u_n)$ suivant les puissances des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n , et d'égaliser à zéro tous les coefficients

$$\phi_1^{(i)}(y_1, y_2, \dots, y_n), \phi_2^{(i)}(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, \phi_k^{(i)}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

de ce développement. L'ensemble des équations ainsi formées est certainement équivalent à l'équation $S_i = 0$ elle-même, qui doit être vérifiée indépendamment des indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n . En d'autres termes, $S_i = 0$ est identique à l'équation résolvante du système

$$[\phi_1^{(i)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \phi_2^{(i)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \dots, \phi_k^{(i)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0].$$

L'ensemble de ces derniers systèmes, formés pour tous les facteurs irréductibles S_i du résolvant R , est équivalent au système donné.

Tout ceci ressort immédiatement de la définition même de l'irréductibilité des systèmes. Mais ce qui est bien remarquable, c'est que l'on puisse toujours former un système irréductible, équivalent au précédent, $(\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}, \dots, \phi_k^{(i)})$ et composé de $(n + 1)$ éléments seulement. Ce nombre peut se réduire dans chaque cas particulier, mais un seul élément

et $\gamma_n^{(h)}, \gamma_{n-1}^{(h)} + \gamma_n^{(h)}, \gamma_{n-2}^{(h)} + \gamma_n^{(h)}, \dots, \gamma_{n-i+1}^{(h)} + \gamma_n^{(h)}$, sont précisément les racines des équations qui composent le système que nous considérons maintenant; si donc $S_i = 0$, ce système est vérifié par une variété $(n-i)^{\text{ième}}$ et, par suite, $R_i = 0$.

Mais S_i n'est pas nécessairement identique à R_i . Supposons donc qu'il y ait des systèmes de valeurs, formés par certaines combinaisons des racines des i équations précédentes, qui vérifient simultanément ces i équations et, par suite, leur résolvante de rang i , et ne vérifient cependant pas l'équation $S_i(y, y_1, \dots, y_{n-i}, u_1, \dots, u_n) = 0$. Ces solutions peuvent alors, il est vrai, pour certaines valeurs particulières données aux entiers p_1, p_2, \dots, p_n , vérifier l'équation

$$S_i(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n, y_1, \dots, y_{n-i}, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

mais elle ne saurait vérifier cette équation pour tous les systèmes possibles p_1, p_2, \dots, p_n . D'autre part, l'équation

$$\begin{aligned} & S_i(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n, y_1, \dots, y_{n-i}, p_1, \dots, p_n) \\ &= \prod_{(h)} \{ p_{n-i+1} (y_{n-i+1} - \gamma_{n-i+1}^{(h)}) + \dots + p_n (y_n - \gamma_n^{(h)}) \} = 0 \end{aligned}$$

est certainement vérifiée pour toutes les solutions de l'équation

$$\begin{aligned} & S_i(u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n, y_1, \dots, y_{n-i}, u_1, \dots, u_n) \\ &= \prod_{(h)} \{ u_{n-i+1} (y_{n-i+1} - \gamma_{n-i+1}^{(h)}) + \dots + u_n (y_n - \gamma_n^{(h)}) \} = 0. \end{aligned}$$

Si donc la fonction

$$S_i(y, y_1, \dots, y_{n-i}, u_1, \dots, u_n)$$

ne représente pas à elle seule le résolvant de rang i des i équations considérées, nous pouvons toujours choisir des entiers p_1, p_2, \dots, p_n tels qu'elle représente, à elle seule, le résolvant de rang i des $(i+1)$ équations

soit égal à l'unité et que les résolvants de rangs supérieurs égaux à zéro ne représentent pas des variétés contenues dans la variété $(n-i)^{\text{ième}}$, $S_i = 0$. D'ailleurs le résolvant de rang i de ce système est, comme celui du système précédent, égal à S_i .

En continuant ainsi nous obtenons successivement de nouveaux systèmes contenant chacun une équation de plus que son précédent, et ayant leurs résolvants de rang $(i+1)$, $(i+2)$, ..., égaux à l'unité. Enfin nous parvenons à un système composé de n équations et tel que son résolvant de rang i étant toujours S_i , ses résolvants de rang $(i+1)$, $(i+2)$, ..., $(n-1)$ soient égaux à l'unité; seul son résolvant R_n , de rang n , peut encore être différent de l'unité; mais nous avons pu remplacer les indéterminées u_1, u_2, \dots, u_n , par des systèmes d'entiers p_1, p_2, \dots, p_n tels que les systèmes isolés que représente l'équation $R_n = 0$ ne soient pas situés sur la variété $S_i = 0$, toujours puisque le résolvant de rang i , égalé à zéro, ne représente qu'une variété d'ordre $(n-i)$. En ajoutant, d'ailleurs, au système précédent composé de n équations, l'équation

$$S_i(y, y_1, y_2, \dots, y_{n-i}, u_1, \dots, u_n) = 0$$

nous formons un nouveau système dont le résolvant de rang i est toujours S_i , et les résolvants de rang $(i+1)$, $(i+2)$, ..., $(n-1)$, toujours l'unité, quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace u_1, u_2, \dots, u_n , dans la dernière équation. Comme l'équation $S_i = 0$ n'est pas vérifiée, pour des n indéterminées, par la variété d'ordre zéro représentée par le résolvant R_n égalé à zéro, nous pouvons déterminer des entiers

$$p_1^{(n-i)}, p_2^{(n-i)}, \dots, p_n^{(n-i)},$$

tels que le résolvant de rang n du système

$$\begin{aligned} S_i(y_n + y_n, y_1, \dots, y_{n-i}) &= 0 \\ S_i(p_1^{(k)} y_1 + \dots + p_n^{(k)} y_n, y_1, \dots, y_{n-i}) &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} h=0, n-i+1, \dots, n-1 \\ k=0, 1, \dots, n-i \\ y_0=0 \end{array} \right)$$

soit égal à l'unité. Le résolvant total de ce système, qui se compose au plus de $(n+1)$ équations, est alors précisément égal à

$$S_i(y, y_1, \dots, y_{n-1}, u_1, \dots, u_n).$$

Dans la démonstration précédente nous avons fait usage de ce que $S_i = 0$ ne représentait qu'une seule variété, mais non de ce que S_i était irréductible. Nous pouvons donc énoncer immédiatement le théorème:

«(n + 1) équations suffisent toujours et sont en général nécessaires pour isoler, c'est à dire pour figurer à l'exclusion de toute autre variété, une variété d'ordre quelconque, prise dans une variété n^{ime}.»

Nous dirons que cette figuration, par $(n + 1)$ équations, d'un système d'équations représentant une variété déterminée, est la *figuration complète* de ce système d'équations.

Un exemple très-intéressant de la différence essentielle qu'il y a entre la figuration principale et la figuration complète d'un système, est le suivant. Considérons un déterminant formé à l'aide de m^2 variables. D'après le dernier théorème, la condition nécessaire et suffisante pour que tous les mineurs d'ordre $(m - k + 1)$ s'annulent, doit pouvoir s'exprimer par $(m^2 + 1)$ équations, quel que soit k . Mais il suffit d'introduire une *inégalité*, pour que ce nombre d'équations se réduise à k^2 , comme M. KRONECKER l'a démontré dans une lettre à M. BALTZER, insérée dans le Journal de CRELLE. La variété représentée par les $(m^2 + 1)$ équations dont nous parlons est donc d'ordre k^2 seulement; et cependant, si nous ne voulons pas introduire d'inégalité, elle ne peut s'exprimer par moins de $(m^2 + 1)$ équations.

Conclusion.

Les recherches contenues dans ce Mémoire amènent à plusieurs résultats intéressants.

1. Nous avons vu que non seulement la théorie de l'irréductibilité des fonctions entières, mais encore celle de systèmes particuliers de fonctions entières, pouvait être résolue sans quitter le domaine de l'Arithmétique et de l'Algèbre. L'importance des indéterminées dans cette recherche indique déjà le grand rôle qu'elles peuvent jouer en Algèbre. Leur association systématique aux éléments de cette science est comme le couronnement du grand trait de génie de GAUSS, qui a donné à l'Arithmétique un caractère tout différent de celui que cette science avait jusqu'alors; et, d'autre part, elle est intimement liée par le principe d'équivalence de M. KUMMER aux belles recherches arithmétiques de cet éminent géomètre.

2. En supposant connue la notion de fonction algébrique, nous avons montré comment on peut résoudre le problème général de la décomposition des systèmes de fonctions entières et ce qu'il fallait entendre par équivalence dans cette décomposition. (Comparez Festschrift § 20).

3. Nous nous sommes ensuite assurés que toute dépendance donnée par un nombre quelconque de fonctions entières égalées à zéro, peut être algébriquement — algébriquement, et non pas seulement logiquement, ce qui serait insuffisant en Algèbre. — ramenée à la dépendance donnée par *une* fonction entière égalée à zéro. Ainsi, en particulier, le domaine de rationalité le plus général que l'on puisse former, est bien celui que nous avons nommé domaine général de rationalité. Ce théorème complète le second chapitre de ce Mémoire. (Comparez Festschrift § 10.)

4. Nous voyons aussi quelle grande simplification la notion de contenant et de contenu, plus générale que celle de la divisibilité, introduit dans nos recherches. Elle n'est d'ailleurs point suffisante et il faut la généraliser encore, comme nous l'avons dit dans le troisième chapitre. Mais déjà la généralisation dont nous nous sommes particulière-

ment occupés, nous a rendu de vrais services et nous avons vu, plusieurs fois, combien elle est naturelle.

5. La théorie générale de l'élimination nous permet également d'énoncer quelques théorèmes fondamentaux qui jettent un nouveau jour sur les formes géométriques d'un nombre quelconque de dimensions. A cet effet il suffit de ne plus limiter le domaine de rationalité.

6. Si nous jettons enfin un coup d'œil sur les méthodes employées, nous voyons que tout revient toujours à la recherche du plus grand commun diviseur. Comme l'élimination est *la cinquième et la plus élevée des opérations de l'Algèbre*, on peut donc dire que la notion du plus grand commun diviseur domine l'Algèbre toute entière. C'est d'ailleurs bien naturel. La notion de plus grand commun diviseur des nombres entiers domine, elle aussi, l'Arithmétique élémentaire, et j'ai insisté, en commençant, sur l'identité des domaines arithmétique et algébrique.

Je termine en remarquant que, dans l'ordre de recherches abordées dans ce Mémoire, il conviendrait

α) d'étudier de plus près le cas si intéressant des systèmes impropres à la décomposition, dans le sens que nous avons attaché à ce mot;

β) de débarrasser les deux derniers chapitres de la notion de fonction algébrique, comme dans le cas particulier traité dans le chapitre trois.

En un mot, il conviendrait de *substituer davantage, et sans faire usage d'éléments étrangers à l'Arithmétique, la décomposition des systèmes de fonctions entières, à celle des systèmes correspondants d'équations algébriques.*

Paris, 20 Octobre 1883.

ERRATA.

Page 8	lignes 3 et 4,	au lieu de u	lire x .
» 9	ligne 15,	» » » les premiers	» le premier.
» 81	» 11,	» » » nul	» nulle.
» 85	lignes 4 et 6,	» » » z	» z_k .
» 86	ligne 28,	» » » genre	» germe.
» 92	» 14,	» » » x_k	» x_h .
» 105	» 3,	au lieu du texte lire	

$$R_1 = R : \text{Dv} (R, R') = R : R_1;$$

$$R_2 = \bar{R}_1 : \text{Dv} (\bar{R}_1, \bar{R}'_1) = \bar{R}_1 : \bar{R}_2;$$

.



UEBER DEN BEGRIFF DER LÄNGE EINER CURVE.

Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Curven⁽¹⁾

VON

P. DU BOIS-REYMOND

in TÜBINGEN.

In dem Aufsatz des Herrn L. SCHEEFFER über Rectification ist im Eingang gesagt, meine Begriffs-festsetzung der Länge einer Curve⁽²⁾ sei jedenfalls zu eng, da es Curven mit nachweisbarer Länge gebe, für die das Integral

$$\int dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

nicht existirt, während ich seine Existenz meinem Längenbegriff zu Grunde lege. Ich glaube, dass hier ein Missverständniss vorliegt. Zunächst ist es mir mindestens fraglich, ob bei einer anorthoiden (nicht differenzirbaren) Function man von einer Curve als ihrem geometrischen Äquivalent reden dürfe. Auf alle Fälle setzt der Curvenbegriff, wie er in der Geometrie, der Variationsrechnung, der Mechanik heimisch und erforderlich ist, die Orthoidie voraus, und ich habe in meinen *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung* unnöthige Einschränkungen sorgfältig vermieden. Der wahre und eigentliche Begriff Länge kommt nur den Stücken gerader Linie zu. Sodann wendet man ihn im übertragenen Sinne an auf solche krumme Linien, welche die Vorstellung der Abwickelbarkeit zulassen, wozu die Existenz der Tangente gehört. Darüber hinaus tritt an die Stelle der Länge eine rein analytische Erweiterung.

⁽¹⁾ *Acta Mathematica*, T. 5, p. 49—82.

⁽²⁾ *Mathematische Annalen*, Bd 15, p. 287.

Acta mathematica. 6. Imprimé 13 Septembre 1884.

Ich habe nie daran gezweifelt, dass das Sehnenpolygon auch anorthoider Functionen unter Umständen eine Grenze haben könne, und Herrn SCHEEFER's Untersuchung solcher Umstände war mir daher, wenn auch lehrreich, so doch nicht überraschend. Aber wäre es nicht, selbst für eine rein analytische Erweiterung des Längenbegriffs, vomöthen, zu zeigen dass eine anorthoide »Curve« nicht auch zwei »Längen« haben könne, dass nicht, was bei orthoiden »Curven« völlig ausgeschlossen ist, durch ein anderes Approximationsverfahren, z. B. durch aus geeignet gekrümmten Kreisbögen zusammengesetzte Polygone eine andere Länge herausgebracht werden könnte, wie durch das Sehnenpolygon? Solche Erwägungen gestatten mir nicht, die Meinung aufzugeben, dass der von mir mit dem Ausdruck Länge verbundene Begriff nicht zu eng, sondern gerade angemessen ist.

Tübingen, 16 Mai 1884.

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

K. WEIERSTRASS

À BERLIN.

Traduit de l'allemand⁽¹⁾ par A. Pautonnier à Paris.

L'objet de ce mémoire est de combler une lacune qui se trouve dans l'ouvrage de JACOBI: *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetaeihen abgeleitet* (Gesammelte Werke. T. 1, p. 497) et sur laquelle j'ai appelé l'attention dans une note page 545. Par suite j'ai employé ici constamment les notations de JACOBI.

Pour exprimer les fonctions elliptiques

$$\sin \operatorname{am}(u, k), \quad \cos \operatorname{am}(u, k), \quad \Delta \operatorname{am}(u, k)$$

au moyen des fonctions de JACOBI

$$\theta(x, q) = 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots$$

$$\theta_1(x, q) = 2\sqrt[4]{q} \cdot (\sin x - q^2 \sin 3x + q^6 \sin 5x - \dots)$$

$$\theta_2(x, q) = 2\sqrt[4]{q} \cdot (\cos x + q^2 \cos 3x + q^6 \cos 5x + \dots)$$

$$\theta_3(x, q) = 1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \dots$$

on a à résoudre le problème de déterminer pour chaque valeur donnée de k une valeur de q satisfaisant à l'équation

$$(1) \quad \sqrt{k} = \frac{\theta_3(0, q)}{\theta_3(0, q)} = 2\sqrt[4]{q} \cdot \frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}.$$

(¹) Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der k. preussischen Akademie der Wissenschaften, 1883, p. 95—105, 163—173, 621—647.

Lorsqu'on a trouvé une telle valeur, alors en posant

$$(2) \quad \frac{2K}{\pi} = \theta_3^2(0, q) \quad x = \frac{u\pi}{2K}$$

on a

$$(3) \quad \begin{cases} \sqrt{k} \cdot \sin \operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta_1(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot \cos \operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta_2(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot \Delta \operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta_3(x, q)}{\theta(x, q)}. \end{cases}$$

D'ailleurs on peut fixer arbitrairement la valeur de l'un des radicaux \sqrt{k} , $\sqrt[4]{q}$ et la valeur de l'autre se trouve déterminée par l'équation (1). Il faut choisir la valeur de $\sqrt[4]{1-k^2}$ de manière que l'on ait

$$(4) \quad \sqrt[4]{1-k^2} = \frac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots}.$$

Dans le traité posthume de JACOBI: *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet*, ce problème est traité (§ 6) pour le cas où k est une quantité réelle comprise entre 0 et 1 et la solution donnée en montrant que partant de l'équation (1) on arrive à la même expression de q que celle trouvée par JACOBI dans les *Fundamenta nova* par la voie convenant à cet ouvrage. Je vais maintenant montrer comment, avec les moyens employés par JACOBI dans le traité cité ci-dessus, on peut pour toute valeur complexe de k déterminer toutes les valeurs de q satisfaisant à l'équation (1), et cela au moyen d'une série qui non-seulement à cause de sa rapide convergence fournit un moyen commode de calcul de la valeur de q correspondant à une valeur numérique donnée de k , mais encore, si l'on considère k comme une quantité variable et q comme une fonction de k , peut servir à découvrir les propriétés caractéristiques de cette fonction. J'emploierai principalement les deux équations utilisées aussi par JACOBI

$$(5) \quad \begin{cases} \theta_3(0, q) = \theta_3(0, q^4) + \theta_2(0, q^4) \\ \theta(0, q) = \theta_3(0, q^4) - \theta_2(0, q^4) \end{cases}$$

qui se déduisent immédiatement des expressions de $\theta_3(0, q)$ et $\theta(0, q)$, ainsi que la relation

$$(6) \quad \theta^4(0, q) + \theta_2^4(0, q) = \theta_3^4(0, q).$$

1.

Je considère d'abord exclusivement les valeurs réelles de q soumises à la condition

$$0 \leq q < 1$$

et je suppose que dans la suite si a est une quantité positive $\log a$ désignera la valeur réelle du logarithme naturel de a , et a^m désignera pour une valeur quelconque de m la valeur donnée par la formule

$$e^{m \log a}.$$

Par suite $\theta(0, q)$, $\theta_2(0, q)$, $\theta_3(0, q)$ ont toujours des valeurs réelles et sont des fonctions continues de q .

De plus, sur les expressions des quantités $\theta_2(0, q)$, $\theta_3(0, q)$, on aperçoit immédiatement que la seconde est constamment positive, et que pour $q > 0$ il en est de même de la première qui s'annule pour $q = 0$. Quant à $\theta(0, q)$, si cette quantité était nulle pour une valeur déterminée de q , il en résulterait d'après (5)

$$\theta_3(0, q^4) = \theta_2(0, q)$$

et par suite, en vertu de l'équation (6), on aurait aussi $\theta(0, q^4) = 0$. Il en résulterait encore que $\theta(0, q^{16})$, $\theta(0, q^{64})$ seraient aussi nulles, ce qui est impossible, parce que $\theta(0, q^m)$ pour une valeur infiniment grande de m prend une valeur infiniment voisine de 1. Par suite $\theta(0, q)$ ne peut s'annuler pour aucune des valeurs considérées de q , et est par suite constamment positive.

D'après cela

$$\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$$

est une fonction continue de q qui s'annule pour $q = 0$ et a une valeur positive pour toute autre valeur de q . Elle est toujours plus petite que 1 en vertu de l'équation (5)

$$\theta_3^4(0, q) > \theta_2^4(0, q);$$

mais on peut montrer que lorsque q partant de la limite zéro et croissant constamment s'approche de la limite 1, q croît aussi constamment et tend vers la même limite.

Comme on a

$$\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}.$$

on peut prendre toujours une valeur positive $q_0 < 1$ telle que

$$\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$$

croisse constamment lorsque q croissant d'une manière continue parcourt l'intervalle $(0 \dots q_0)$. Mais il résulte des équations (5) si on remplace

q par $q^{\frac{1}{4}}$

$$(7) \quad \frac{\theta(0, q^{\frac{1}{4}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4}})} = \frac{1 - \frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}}{1 + \frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}}.$$

D'après cela $\frac{\theta(0, q^{\frac{1}{4}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4}})}$ décroît constamment, lorsque q parcourt en croissant constamment l'intervalle en question, ou bien, ce qui est la même chose, $\frac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ décroît constamment lorsque q croissant constamment passe de 0 à $q_0^{\frac{1}{4}}$. Mais on a

$$\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} = \left(1 - \frac{\theta^4(0, q)}{\theta_3^4(0, q)}\right)^{\frac{1}{4}};$$

par suite $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ croît en même temps que q tant que $q < q_0^{\frac{1}{4}}$. Il en résulte par suite qu'il en est de même aussi longtemps que q est inférieur à

$$q_0^{\frac{1}{16}}, q_0^{\frac{1}{64}}, \dots$$

Les termes de cette série convergent vers 1, par suite $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ croît en même temps que q , si près que q s'approche de l'unité. Si on pose

$$\delta = 1 - \frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$$

on a encore, d'après (7)

$$\frac{\theta_2(0, q^{\frac{1}{4}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4}})} < \delta$$

$$1 - \frac{\theta_2(0, q^{\frac{1}{4}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4}})} - \frac{\theta_2(0, q^{\frac{1}{4}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4}})} < \delta^4$$

et par suite aussi

$$1 - \frac{\theta_2(0, q^{\frac{1}{4}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4}})} < \delta^4.$$

Il en résulte par suite que pour toute valeur entière positive de m

$$1 - \frac{\theta_2(0, q^{\frac{1}{4^m}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4^m}})} < (\delta)^{4^m};$$

par suite, lorsque m devient infiniment grand, la valeur de $q^{\frac{1}{4^m}}$ s'approche indéfiniment de la limite 1, et

$$\frac{\theta_2(0, q^{\frac{1}{4^m}})}{\theta_3(0, q^{\frac{1}{4^m}})}$$

s'approche aussi indéfiniment de cette limite. Ce qui démontre évidemment la propriété annoncée de la fonction $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$.

Cela fait, supposons le quotient

$$\frac{\theta_2^4(\mathcal{O}, q)}{\theta_3^4(\mathcal{O}, q)}$$

développé en série $\mathfrak{P}(q)$ suivant les puissances de q . Le premier terme de cette série est $16q$, et ses coefficients sont des nombres rationnels. On peut par suite déterminer une suite infinie de nombres rationnels

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

de manière que pour une valeur suffisamment petite de q l'équation

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q) = q$$

soit satisfaite, d'où il résulte, comme $\alpha_0 = \frac{1}{16}$

$$(9) \quad \log(16q) = \log \mathfrak{P}(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}^n(q)$$

où β_1, β_2, \dots sont toujours des nombres rationnels.

Si maintenant on choisit une quantité positive $q_0 < 1$ de manière qu'elle se trouve dans le domaine de convergence de la série $\mathfrak{P}(q)$, et si on pose en même temps

$$t_0 = \left(\frac{\theta_2(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} \right)^4$$

la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n$$

(dans laquelle $|\beta_n|$ désigne la valeur absolue de β_n) a une valeur finie et on a certainement l'égalité

$$(10) \quad \log q + \log 16 = 4 \log \frac{\theta_2(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\theta_2(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} \right)^{4n}$$

pour les valeurs de q satisfaisant à la condition

$$0 < q \leq q_0$$

parce que pour toutes ces valeurs on a d'après ce qui précède

$$0 < \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 \leq t_0.$$

Si on désigne par t

$$\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4$$

et si on remplace dans (10) q par q^4 , comme on a d'après les équations (5)

$$(11) \quad \frac{\theta_2(0, q^4)}{\theta_3(0, q^4)} = \frac{1 - \frac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)}}{1 + \frac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)}} = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

on obtient une seconde expression pour $\log q$, à savoir

$$(12) \quad 4 \log q + \log 16 = 4 \log \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}.$$

Et alors de (10) et de (12) on déduit l'équation

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \log \left(\frac{8}{t} \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}.$$

Pour obtenir cette équation nous avons considéré t comme une fonction de q . Mais comme, lorsque q croissant d'une manière continue parcourt l'intervalle $(0 \dots g_0)$ t croissant constamment passe de la valeur 0 à la valeur t_0 , on voit que l'égalité (13) persiste lorsqu'on considère t comme une variable indépendante et qu'on lui donne une valeur quelconque appartenant à l'intervalle $(0 \dots t_0)$.

Mais on a

$$\begin{aligned} d \log \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right) &= \frac{\frac{1}{4} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt}{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{1}{4} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt}{1 - (1-t)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{1}{4}} \right) \frac{dt}{t}; \end{aligned}$$

si donc on développe $\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}$ suivant les puissances de t , et si on pose

$$(14) \quad \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \varepsilon_1 t + 2\varepsilon_2 t^2 + 3\varepsilon_3 t^3 + \dots$$

il vient

$$(15) \quad \log \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right) = \log \frac{t}{8} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} t^{\nu}$$

et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ sont des nombres rationnels et *positifs*.

De (15) résulte alors

$$(16) \quad \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^m = t^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{\nu}$$

où pour un exposant quelconque m les coefficients $\varepsilon_{m,\nu}$ sont déterminés par l'équation suivante résultant de (14) et de (16)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu) \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu-1} = m \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu} \left(\frac{1}{t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \varepsilon_{\nu} t^{\nu-1} \right);$$

on déduit de cette équation la formule de récurrence

$$(17) \quad \nu \varepsilon_{m,\nu} = m \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu \varepsilon_{\mu} \varepsilon_{m,\nu-\mu} \quad (\nu > 0)$$

de laquelle, comme $\varepsilon_{m,0} = \left(\frac{1}{8}\right)^m$, on tire la conclusion importante *que pour une valeur positive de m les grandeurs $\varepsilon_{m,\nu}$ sont toutes des nombres positifs*.

Il résulte de la manière dont on les a obtenues, que les séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} t^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{\nu}$$

sont convergentes pour toute valeur réelle ou complexe de t dont le module est inférieur à 1. Par suite des propriétés des quantités $\varepsilon_{\nu}, \varepsilon_{m,\nu}$

on a pour toute valeur réelle de t comprise entre 0 et 1 et toute valeur positive de m

$$\sum_{\nu=1}^n \varepsilon_{\nu} t^{\nu} < \log \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{n}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{n}}} \right) + \log \frac{8}{t}$$

$$\sum_{\nu=0}^n \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu} < \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{n}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{n}}} \right)^m.$$

De là il résulte, si l'on fait converger t vers la limite 1

$$\sum_{\nu=1}^n \varepsilon_{\nu} \leq \log 8, \quad \sum_{\nu=0}^n \varepsilon_{m,\nu} \leq 1$$

ou même comme cela a lieu encore si on remplace n par $(n+1)$

$$\sum_{\nu=1}^n \varepsilon_{\nu} < \log 8, \quad \sum_{\nu=0}^n \varepsilon_{m,\nu} < 1.$$

Par suite les séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} t^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{\nu}$$

sont convergentes pour toute valeur de t dont le module est égal à 1, et il résulte des équations (15), (14), si on fait tendre t vers la limite 1

$$(18) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} = \log 8, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} = 1.$$

Si nous désignons maintenant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu}, \text{ par } \mathfrak{P}(t, m),$$

d'après ce qui précède on a pour toute valeur réelle de t comprise dans l'intervalle $(0 \dots t_0)$

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n t^n + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t, 4n),$$

t_0 pouvant représenter une valeur positive quelconque, inférieure à 1 et comprise à l'intérieur du domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$. Maintenant si l'on pose

$$t_1 = t_0^{\frac{1}{4}},$$

par suite de cette circonstance que les coefficients de la série $\mathfrak{P}(t, 4n)$ sont positifs et que leur somme est égale à 1,

$\mathfrak{P}(t_1, 4n)$ est positif mais inférieur à t_0^n ,
et par suite

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \mathfrak{P}(t_1, 4n) < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n.$$

Pour toute valeur de t satisfaisant à la condition $|t| \leq t_1$ on a

$$|\mathfrak{P}(t, 4n)| \leq \mathfrak{P}(t_1, 4n),$$

et la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_n| \varepsilon_{4n, \nu} |t|^{4n+\nu}$$

a une valeur finie. Par suite la série

$$\sum_{n, \nu} \beta_n \varepsilon_{4n, \nu} t^{4n+\nu}$$

est absolument convergente, et il en résulte, si on reunit tous les termes contenant la même puissance de t

$$(20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t, 4n) = \Sigma(r, \rho) t^{4r+\rho}, \quad (\rho=0, 1, 2, 3; \quad r=1, \dots, \infty)$$

où l'on a

$$(21) \quad (r, \rho) = \sum_{n=1}^r \varepsilon_{4n, 4r-4n+\rho} \beta_n.$$

De l'équation (19) on obtient ensuite

$$(22) \quad \begin{cases} \beta_1 = \varepsilon_1, & \beta_2 = \varepsilon_2, & \beta_3 = \varepsilon_3 \\ \beta_{4r+\rho} = \varepsilon_{4r+\rho} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^r \varepsilon_{4n, 4r-4n+\rho} \beta_n. \end{cases} \quad (\rho=0, 1, 2, 3; \quad r=1, \dots, \infty)$$

et on peut ainsi calculer de proche en proche les quantités β_n après qu'on a déterminé préalablement les nombres ε_n , $\varepsilon_{4n+\nu}$ définis par les équations (14, 17).

Des formules (22) il apparaît que les quantités β_n aussi bien que les quantités ε_ν , $\varepsilon_{4n+\nu}$ sont toutes des nombres positifs et rationnels.

Il résulte encore de ce qui précède *que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

est absolument convergente pour toute valeur de t réelle ou complexe dont le module n'est pas supérieur à 1.

Pour le démontrer, je remarque d'abord qu'on peut se dispenser maintenant de l'hypothèse faite précédemment que la grandeur désignée par t_0 soit située à l'intérieur du domaine de convergence de la série $\sum \beta_n t^n$, et qu'il suffit de supposer que la série soit convergente pour $t = t_0$. Alors d'après ce qui a été démontré plus haut $|\beta_n| = \beta_n$ et alors il est certain que la série qui constitue le second membre de l'équation (20)

converge pour $t = \frac{1}{t_0}$. Mais pour la même valeur de t la série $\sum \varepsilon_n t^n$ est aussi convergente, l'équation (19) montre donc que si la série $\sum \beta_n t^n$ converge pour $t = t_0$, elle converge aussi nécessairement pour $t = \frac{1}{t_0^4}$, et par suite aussi pour

$$t = \frac{1}{t_0^{16}}, \quad \frac{1}{t_0^{64}}, \dots$$

Par suite la série est convergente pour les valeurs positives de t qui s'approchent autant que l'on veut de 1 et le rayon de son cercle de convergence n'est pas inférieur à 1.

D'après cela l'égalité (10)

$$\log q + \log 16 = 4 \log \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^{4n}$$

a lieu pour toute valeur de q satisfaisant à la condition

$$0 \leq q < 1.$$

Mais si q s'approche de la limite 1 l'expression qui forme le second membre de cette égalité converge vers la limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

et on a par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16.$$

En conséquence la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

converge aussi lorsque le module de t est égal à 1, et représente pour le domaine de la quantité t défini par la condition

$$|t| \leq 1$$

une fonction analytique continue de cette variable.

Si on pose maintenant

$$(23) \quad \psi(t) = \frac{t}{16} e^{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n}$$

on obtient

$$(24) \quad \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1}$$

où les coefficients α_n sont identiques à ceux de l'équation (8)

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{p}^{n+1}(q)$$

qu'on peut calculer au moyen des β_n et qui sont comme ceux-ci des nombres rationnels positifs. Si on fait tendre t vers la limite 1, on a

$$(25) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = e^{-\log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n} = 1.$$

La fonction $\psi(t)$ est dès lors définie pour toute valeur de la variable t correspondant à la condition

$$|t| \leq 1.$$

Pour $t = 1$ on a $\varphi(t) = 1$, au contraire pour toute autre valeur de t

$$|\varphi(t)| < 1.$$

D'après ce qui précède l'égalité

$$(26) \quad q = \varphi(t)$$

persiste, si on pose

$$t = \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4$$

et cela certainement pour les valeurs réelles de q appartenant à un certain intervalle $(0 \dots q_0)$. Pour toutes les valeurs de t correspondant à ces valeurs de q on a l'égalité

$$(27) \quad [1 + 2\varphi(t) + 2\varphi^4(t) + 2\varphi^9(t) + \dots]^4 \cdot t = 16\varphi(t)[1 + \varphi^{12}(t) + \varphi^{16}(t) + \dots].$$

Mais si on considère t comme une variable indépendante et limitée à l'espace déterminé par la condition

$$|t| \leq 1$$

la valeur $t = 1$ étant cependant exceptée, les deux membres de l'égalité précédente sont une fonction analytique uniforme et continue de t parce que pour chacune des valeurs considérées de cette quantité on a

$$|\varphi(t)| < 1.$$

D'après un théorème connu l'égalité persiste pour chacun des valeurs de t appartenant à l'intervalle considéré. On peut encore montrer que $\theta_2(0, q)$ ne peut s'annuler même pour une valeur complexe de q , et cela de la même manière que nous l'avons démontré plus haut pour la fonction $\theta(0, q)$, en supposant que q était une quantité positive.

Nous avons donc établi que si:

t est une grandeur réelle ou complexe dont le module ne surpasse pas l'unité, et qui n'est pas égale à 1 l'égalité

$$(28) \quad \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 = 4$$

est satisfaite, si l'on pose

$$q = q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1}.$$

Si le module (k) des fonctions elliptiques ne surpasse pas l'unité en valeur absolue et si son carré n'est pas égal à 1, alors nous avons pour

$$\sin \operatorname{am}(u, k), \quad \cos \operatorname{am}(u, k), \quad \Delta \operatorname{am}(u, k)$$

les expressions (3), si on pose

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n k^{2n+2}.$$

De plus comme les fonctions elliptiques d'un module quelconque peuvent se réduire à celles dont le module satisfait aux conditions énoncées, ce qui précède suffit pour démontrer que chacune de ces fonctions peut se représenter sous la forme du quotient de deux séries θ . Dans une communication suivante je montrerai comment on peut transformer la série

$$\sum \alpha_n t^n$$

en une autre convergente pour toute valeur de t , et démontrerai en même temps comment avec les moyens employés ici on peut résoudre le problème de déduire de l'une d'entre elles toutes les autres valeurs de q satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(\infty, q)}{\theta_1(\infty, q)} \right)^4 = t.$$

2.

D'après ce qui a été établi précédemment sur le cercle de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

et sur les propriétés des nombres β_n l'équation (13) du chapitre précédent, qui peut s'écrire sous la forme

$$\log t - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \frac{1}{4} \left| \log \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right) - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n} \right|$$

est vérifiée certainement pour toute valeur réelle comprise dans l'intervalle $(0 \dots 1)$, car la quantité désignée par t_0 dans l'établissement de ces équations, sur laquelle on a fait seulement la supposition que la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n$$

a une valeur finie, peut maintenant être prise égale à 1 en vertu des équations

$$|\beta_n| = \beta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16.$$

Si on pose donc

$$e^{-\frac{1}{4} \log 16 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$$

les coefficients γ_n étant comme les α_n des nombres rationnels positifs, et

$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = 1$, on a

$$(1) \quad \Psi(t) = t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n \right)^4$$

et en même temps

$$(2) \quad \Psi(t) = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}.$$

Mais la série qui forme le second membre de cette égalité est convergente

pour toute valeur réelle ou complexe de la quantité t et représente une fonction analytique de cette variable, si on fixe comme il suit l'une des quatre valeurs qu'on peut attribuer à la puissance $(1 - t)^{\frac{1}{4}}$ pour chaque valeur déterminée de t . Si on excepte du domaine d'une quantité variable sans aucune restriction, les valeurs réelles négatives ainsi que les points 0 et ∞ , il y a toujours parmi les valeurs en nombre infini que le logarithme naturel de x peut prendre pour une valeur déterminée de cette variable, une valeur dont la seconde coordonnée est comprise entre

$$-\pi \text{ et } +\pi.$$

C'est toujours dans la suite cette valeur que nous aurons en vue en écrivant $\log x$: elle constitue à l'intérieur du domaine défini pour la variable x une fonction analytique uniforme de cette variable, car si x' est un point déterminé quelconque de ce domaine, on peut l'entourer d'un contour tel qu'à l'intérieur la série

$$(3) \quad \log x' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - x'}{x'} \right)^n$$

représente une telle valeur du logarithme naturel de x dont la seconde coordonnée comme celle de $\log x'$ est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

De là il résulte en particulier que

$$(4) \quad \log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x - 1)^n$$

si on limite la quantité x au domaine limité par la condition

$$|x - 1| < 1.$$

Car à l'intérieur de ce domaine les expressions figurant dans les deux membres de l'égalité sont toutes les deux des fonctions analytiques uniformes de x ; l'égalité a donc lieu pour le domaine entier, car d'après une remarque précédente elle persiste dans le voisinage du point 1.

De plus si x_0 est une quantité négative déterminée pour les valeurs

de x appartenant à un certain voisinage du point x_0 , la seconde coordonnée de la quantité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n$$

est négative ou positive suivant que la seconde coordonnée de $x - x_0$ est positive ou négative. On a donc dans le premier cas

$$(5) \quad \log x = \log(-x_0) + \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n$$

dans le second au contraire

$$(6) \quad \log x = \log(-x_0) - \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n.$$

De là il résulte, que lorsque x s'approche du point x_0 , suivant que cela a lieu du côté positif ou négatif de l'espace $(-\infty \dots 0)$, $\log x$ s'approche indéfiniment de la limite $\log(-x_0) + \pi i$ ou de la limite $\log(-x_0) - \pi i$. Si on désigne les valeurs données par les formules pour $\log x_0$

$$\log(-x_0) + \pi i, \quad \log(-x_0) - \pi i$$

respectivement par

$$\log^+ x_0, \quad \log^- x_0$$

on a

$$(7) \quad \log^+ x_0 = \log^- x_0 + 2\pi i.$$

Par suite de ce qui précède on a donc pour les valeurs de x appartenant à un certain voisinage de x_0

$$(8) \quad \log x = \log^{\pm} x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que la seconde coordonnée de $x - x_0$ est positive ou négative.

De la définition de $\log^+ x_0$ et $\log^- x_0$ il apparaît du reste que les deux valeurs sont à l'intérieur de l'espace $(-\infty \dots 0)$ des fonctions continues de x_0 .

De plus si on définit pour les valeurs considérées de x et un exposant quelconque m la puissance x^m par l'égalité

$$(9) \quad x^m = e^{m \log x}$$

nous tirerons des équations (3, 4) respectivement les suivantes

$$(10) \quad x^m = x_0^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n \quad \left[(m)_n = \frac{(m-1)^n}{(1+1)^n} \right]$$

$$(11) \quad x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n (x - 1)^n.$$

x^m est donc aussi une fonction analytique uniforme de x . Si on pose pour une quantité négative x_0

$$(12) \quad \begin{cases} (x_0)^m = e^{m \log^+ x_0} \\ (x_0)^m = e^{m \log^- x_0} \end{cases}$$

on déduit des équations (7, 8)

$$(13) \quad (x_0)^m = e^{2m\pi i} (\bar{x}_0)^m$$

$$(14) \quad x^m = (x_0)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que la seconde coordonnée de $x - x_0$ est positive ou négative. Le domaine de x , à l'intérieur duquel les égalités (10, 11, 14) ont lieu est le même que celui pour les égalités correspondantes (5, 6, 8). Enfin il ressort de la définition des quantités

$$(\bar{x}_0)^m \quad \text{et} \quad (\bar{x}_0)^m$$

que toutes les deux dans l'étendue $(-\infty \dots 0)$ sont des fonctions continues de x_0 .

D'après ce qui précède, si on désigne maintenant par t une quantité variable sans restriction,

$$(1-t)^{\frac{1}{4}}$$

est une fonction, qui est définie comme uniforme pour toute valeur de t n'appartenant pas à l'étendue $(1 \dots + \infty)$, tandis qu'elle prend deux valeurs si t est pris dans l'étendue en question. Si on pose

$$\log(1-t) = \rho + \sigma i$$

écartant les valeurs $t=1$ et $t=\infty$, et désignant par ρ et σ des grandeurs réelles on a

$$(1-t)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\rho} \left(\cos \frac{1}{4}\sigma + i \sin \frac{1}{4}\sigma \right)$$

et par suite, comme σ est compris dans l'intervalle $(-\pi \dots + \pi)$

$$\left| 1 + (1-t)^{\frac{1}{4}} \right|^2 - \left| 1 - (1-t)^{\frac{1}{4}} \right|^2 = 4e^{\frac{1}{2}\rho} \cos \frac{1}{4}\sigma > 0.$$

De là il résulte que la valeur absolue de

$$\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

est toujours inférieure à 1, et par suite que la série qui forme le premier membre de l'égalité (2) est absolument convergente pour toute valeur de t . Cette dernière propriété subsiste encore lorsqu'on donne à la quantité t

une des valeurs exceptées, car $\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$ a la valeur 1 pour $t=1$, et

la valeur -1 pour $t=\infty$.

D'après cela, si on définit maintenant $\psi(t)$ par l'égalité

$$\psi(t) = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{r}_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n},$$

$\Psi(t)$ est une fonction, qui comme $\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{2}}}$ prend deux valeurs

seulement pour les valeurs de t réelles situées entre $+1$ et $+\infty$, et qui pour toute autre valeur de t est uniforme et déterminée. Il faut ici remarquer que les deux valeurs de $\Psi(t)$ qui correspondent à une valeur réelle de t située entre 1 et $+\infty$ sont des quantités complexes conjuguées comme cela apparaît immédiatement sur les égalités (12).

De ce que nous venons de démontrer par rapport à la fonction $\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{2}}}$, il résulte encore que

$$\Psi(1) = 1, \quad \Psi(\infty) = -1,$$

mais que pour toute valeur de t différente de $1, \infty$

$$|\Psi(t)| < \sum_n \gamma_n$$

par suite

$$|\Psi(t)| < 1.$$

Si on excepte du domaine de la variable les points appartenant à l'étendue $(1, \dots + \infty)$, d'après ce qui précède, $(1 - t)^{\frac{1}{2}}$ n'est pas seule une fonction analytique uniforme, mais il en est encore ainsi des fonctions

$$\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{2}}}, \quad \Psi(t), \quad \theta_2^1[0, \Psi(t)], \quad \theta_3^1[0, \Psi(t)]$$

et l'égalité (27) du § 1

$$\theta_2^1[0, \Psi(t)] = t\theta_3^1[0, \Psi(t)]$$

dont l'exactitude a été démontrée pour des valeurs réelles de t comprises entre 0 et 1 , persiste pour toutes les valeurs de cette grandeur considérées maintenant.

Soit encore t_1 une valeur réelle de t située entre 1 et $+\infty$, si on pose

$$\psi(t_1^+) = \lim_{k \rightarrow 0} \psi(t_1 + k), \quad \psi(t_1^-) = \lim_{k \rightarrow 0} \psi(t_1 - k),$$

en désignant par k une variable positive, alors $\psi(t_1^+)$, $\psi(t_1^-)$ sont les deux valeurs de $\psi(t)$ pour $t = t_1$. Comme $\psi(t_1 + k)$, $\psi(t_1 - k)$ varient d'une manière continue avec k , et que les valeurs absolues de $\psi(t_1^+)$, $\psi(t_1^-)$ sont toutes les deux inférieures à 1, on voit que l'égalité précédente a encore lieu pour $t = t_1$, quelle que soit celle de ses deux valeurs qu'on donne à la quantité $\psi(t)$.

Nous avons ainsi démontré que:

Si la fonction $\psi(t)$ est définie, comme il précède, on a pour toute valeur de la variable t à l'exception de $t = 1$ et $t = \infty$, une valeur de la quantité q satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 = t,$$

si on pose

$$q = \psi(t) = \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}$$

formule dans laquelle on peut prendre aussi bien l'une que l'autre des deux valeurs appartenant à $\psi(t)$, lorsque t a une valeur réelle comprise entre 1 et $+\infty$.

Les coefficients γ_n peuvent se calculer de la manière donnée plus haut, ou comme il suit.

D'après la formule donnée (1) on a pour les valeurs de t considérées ici

$$\psi(t)^{\frac{1}{4}} = (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots) t^{\frac{1}{4}};$$

si donc on pose

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} = \xi, \quad \psi(t)^{\frac{1}{4}} = \eta$$

on a

$$2\eta\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta^{4\nu(2\nu+1)}\right) = \xi\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\eta^{4\nu}\right)$$

ou bien

$$\eta = \frac{\xi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi \eta^{4\nu} - \eta^{(2\nu+1)(2\nu+1)}).$$

D'où si l'on pose

$$\eta_n = \sum_{m=0}^n \eta_m \xi^{4m+1} \quad (n=0, 1, \dots, \infty)$$

il résulte

$$\eta_0 = \frac{1}{2}$$

et

$$\eta_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi \eta_{\nu}^{4\nu} - \eta^{(2\nu+1)(2\nu+1)}) \xi^{4n+3}.$$

Dans cette somme il ne faut considérer que les termes dans lesquels

$$4\nu < 4n + 3.$$

Au moyen de ces formules on obtient

$$\eta_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_1 = \frac{2}{2^5}, \quad \eta_2 = \frac{15}{2^9}, \quad \eta_3 = \frac{150}{2^{13}} \text{ etc. } (1)$$

(1) J'ai déjà donné depuis plusieurs années dans mes leçons sur les fonctions elliptiques la formule

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \left(\frac{1 - (1 - k^2)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - k^2)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n+1}$$

mais trouvée par une autre méthode. Si on emploie seulement ses r premiers termes, l'erreur commise est en valeur absolue inférieure à

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{r-1} \eta_n \right) \cdot \left| \frac{1 - (1 - k^2)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - k^2)^{\frac{1}{4}}} \right|^{4r+1}$$

Comparez *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen* de H. A. SCHWARZ, page 56.

3.

Il faut maintenant montrer comment on trouve l'ensemble des valeurs de q , satisfaisant pour une seule et même valeur de t à l'équation

$$(1) \quad \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 = t.$$

Pour cela il est nécessaire de connaître pour chaque fonction θ toutes les valeurs de l'argument pour lesquelles elles s'annulent avec une valeur donnée de q . Ces valeurs peuvent se trouver aussi bien par la transformation des séries θ en produits infinis, au moyen de l'identité établie dans les *Fundamenta nova*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^n z)(1 + q^n z^{-1}) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} q^{yy} z^y,$$

ou aussi de la manière suivante en se servant seulement des théorèmes établis par JACOBI dans le mémoire plus connu.

De l'équation (1)

$$\frac{\theta'(y)}{\theta(y)} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log \frac{\theta_1(x-y)}{\theta_1(x+y)} = \frac{\theta_1(y) \cdot \theta_2(y) \cdot \theta_3(y) \theta^2(x)}{\theta(y) \theta_1(x+y) \theta_1(x-y)}$$

qui se trouve dans le premier volume des oeuvres de JACOBI, page 536 (1, 4), si l'on développe les deux membres suivant les puissances de y , il résulte par la comparaison des premiers termes

$$(2) \quad \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{d^2}{dx^2} \log \theta_1(x) = \frac{\theta_2(0) \theta_3(0) \theta^2(x)}{\theta_1^2(x)}.$$

Soit maintenant ω une valeur quelconque pour laquelle $\theta_1(\omega) = 0$, il résulte de l'équation précédente, que le quotient $\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$ s'annule pour

(1) Dans les formules suivantes on suppose que dans toutes les fonctions θ q a la même valeur.

$x = \omega$, tandis qu'il résulte des équations (2, 3) page 511 et ailleurs que $\frac{\theta_2(x)}{\theta(x)}$, $\frac{\theta_3(x)}{\theta(x)}$ pour $x = \omega$ ont des valeurs finies différentes de zéro. De la formule pour $\frac{\theta_1(x+y)}{\theta(x+y)}$ (p. 513 et ailleurs) il résulte

$$\frac{\theta_1(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \pm \frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$$

et on a par suite

$$\frac{d^2 \log \theta_1(x+\omega)}{dx^2} = \pm \frac{d^2 \log \theta_1(x)}{dx^2},$$

d'où il résulte

$$(3) \quad \theta_1(x+\omega) = C e^{-2\nu x i} \theta_1(x)$$

formule où C , ν désignent des quantités indépendantes de x .

Des équations (3) p. 502 on tire

$$(4) \quad \theta_1(x+\pi) = -\theta_1(x), \quad \theta_1(x-i \log q) = -q^{-1} e^{-2x i} \theta_1(x).$$

Si donc on remplace x dans (3) par $x+\pi$ $x-i \log q$ et dans (4) par $x+\omega$ on obtient les équations

$$\begin{aligned} \theta_1(x+\omega+\pi) &= -e^{-2\nu \pi i} \cdot C e^{-2\nu x i} \theta_1(x) \\ \theta_1(x+\omega+\pi) &= -C e^{-2\nu x i} \theta_1(x) \\ \theta_1(x+\omega-i \log q) &= -e^{-2\nu \log q} \cdot q^{-1} C e^{-2(\nu+1)x i} \theta_1(x) \\ \theta_1(x+\omega-i \log q) &= -e^{-2\omega i} \cdot q^{-1} \cdot C e^{-2(\nu+1)x i} \theta_1(x). \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$e^{-2\nu \pi i} = 1, \quad e^{-2\omega i} = e^{-2\nu \log q}$$

et par suite

$$(5) \quad \omega = \mu\pi - \nu i \log q,$$

μ , ν représentant des nombres entiers. Inversement, comme on peut le déduire facilement des équations (4), on a toujours

$$\theta_1(\mu\pi - \nu i \log q) = 0$$

lorsque μ , ν sont des nombres entiers quelconques.

L'égalité

$$\theta_1(\omega + x) = Ce^{-2\nu x i} \theta_1(x)$$

montre que $\theta'_1(\omega)$ n'est pas nulle, l'équation $\theta_1(x) = 0$ n'a donc que des racines simples. Comme on a de plus

$$\theta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_2(x)$$

$$\theta_1\left(x - \frac{i}{2} \log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\nu x} \theta(x)$$

$$\theta_1\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\nu x} \theta_2(x),$$

alors l'ensemble des racines des équations

$$\theta_2(x) = 0, \quad \theta(x) = 0, \quad \theta_2(x) = 0$$

est donné respectivement par les formules

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - i\nu \log q, \quad \mu\pi - i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log q, \quad \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log q$$

et chacune de ces équations n'a que des racines simples. Dans les formules précédentes on peut fixer arbitrairement la valeur de $\log q$.

Si on pose maintenant

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{u}{\theta_3^2(0, q)} \\ f(u, q) = \frac{\theta_2(0, q)\theta_1(x, q)}{\theta_2(0, q)\theta(x, q)} \\ f_1(u, q) = \frac{\theta(0, q)\theta_3(x, q)}{\theta_2(0, q)\theta(x, q)} \\ f_2(u, q) = \frac{\theta(0, q)\theta_3(x, q)}{\theta_3(0, q)\theta(x, q)} \end{array} \right.$$

$f(u, q)$, $f_1(u, q)$, $f_2(u, q)$ sont des fonctions uniformes des quantités u et q et si on pose

$$t = \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}\right)^4$$

on a pour ces fonctions les égalités suivantes

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(u, q)}{\partial u} = f_1(u, q) f_2(u, q), \quad \frac{\partial f_1(u, q)}{\partial u} = -f(u, q) f_2(u, q), \\ \frac{\partial f_2(u, q)}{\partial u} = -t f(u, q) f_1(u, q), \quad f(0, q) = 0, \quad f_1(0, q) = 1, \quad f_2(0, q) = 1. \end{array} \right.$$

Si on limite la variable u à un certain espace entourant le point 0, on peut représenter $f(u, q)$, $f_1(u, q)$, $f_2(u, q)$ sous la forme ordinaire de séries procédant suivant les puissances des variables. Les coefficients de ces séries se tirent des égalités (7) comme des fonctions rationnelles entières de la grandeur t dans lesquelles les coefficients sont des nombres rationnels. Par suite s'il y a deux valeurs q, q_1 auxquelles appartienne la même valeur de t , on obtient pour $f(u, q_1)$, $f_1(u, q_1)$, $f_2(u, q_1)$ les mêmes séries que pour $f(u, q)$, $f_1(u, q)$, $f_2(u, q)$, d'où on peut conclure d'après une méthode connue que pour toute valeur finie de u les égalités

$$(8) \quad f(u, q_1) = f(u, q), \quad f_1(u, q_1) = f_1(u, q), \quad f_2(u, q_1) = f_2(u, q)$$

ont lieu.

On a donc d'après ce qui précède

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(u, q) = 0 & \text{pour } u = [\mu\pi - \nu i \log q] \theta_3^2(0, q) \\ f_1(u, q) = 0 & \text{pour } u = \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right) \pi - \nu i \log q \right] \theta_3^2(0, q) \\ f(u, q) = 0 & \text{pour } u = \left[\mu\pi - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) i \log q \right] \theta_3^2(0, q) \\ f_2(u, q) = 0 & \text{pour } u = \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right) \pi - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) i \log q \right] \theta_3^2(0, q) \end{array} \right.$$

lorsqu'on désigne par μ, ν des nombres entiers quelconques. En même temps il se trouve que chacune des quatre fonctions précédentes ne s'annule qu'une fois pour les valeurs données de u . Par suite des égalités

$$f_1(u, q) = f_1(u, q_1), \quad f(u, q) = f(u, q_1)$$

il vient

$$f_1(u, q) = 0$$

aussi pour

$$u = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(0, q_1)$$

et

$$1 - \theta_3^2(0, q_1)$$

aussi pour

$$u = -\frac{i}{2} \theta_3^2(0, q_1) \log q_1.$$

On doit donc pouvoir déterminer quatre nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de manière que

$$(10) \quad \begin{cases} \pi \theta_3^2(0, q_1) = \theta_3^2(0, q) \cdot [2\alpha + 1]\pi - 2\beta i \log q \\ -i \theta_3^2(0, q_1) \log q_1 = \theta_3^2(0, q) \cdot [2\gamma\pi - (2\delta + 1)i \log q]. \end{cases}$$

Mais il doit de même y avoir quatre nombres entiers $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ pour lesquels on ait les égalités

$$(11) \quad \begin{cases} \pi \theta_3^2(0, q) = \theta_3^2(0, q_1) \cdot [2\alpha' + 1]\pi - 2\beta' i \log q_1 \\ -i \theta_3^2(0, q) \log q = \theta_3^2(0, q_1) \cdot [2\gamma'\pi - (2\delta' + 1)i \log q_1]. \end{cases}$$

De ces quatre égalités, si on pose

$$\varepsilon = 2\alpha' + 1 - (2\delta' + 1) - 4\beta'\gamma',$$

il résulte

$$\begin{aligned} & \theta_3^2(0, q) \cdot \left[\left(2\alpha + 1 - \frac{2\delta' + 1}{\varepsilon} \right) \pi - \left(2\beta + \frac{2\beta'}{\varepsilon} \right) i \log q \right] = 0 \\ & \theta_3^2(0, q) \cdot \left[\left(2\gamma + \frac{2\gamma'}{\varepsilon} \right) \pi - \left(2\delta + 1 - \frac{2\alpha' + 1}{\varepsilon} \right) i \log q \right] = 0. \end{aligned}$$

Mais comme $\theta_3(0, q)$ et la partie réelle de $\log q$ ont toujours des valeurs différentes de zéro, ces égalités ne peuvent avoir lieu que si

$$2\alpha + 1 = \frac{2\delta' + 1}{\varepsilon}, \quad 2\beta = -\frac{2\beta'}{\varepsilon}, \quad 2\gamma = -2\frac{\gamma'}{\varepsilon}, \quad 2\delta + 1 = \frac{2\alpha' + 1}{\varepsilon}.$$

Par suite on doit avoir

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = \frac{1}{\varepsilon},$$

donc

$$\varepsilon = \pm 1, \quad (2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = \pm 1.$$

Maintenant il résulte de (11)

$$(12) \quad \frac{1}{\pi i} \log q_1 = \frac{2\gamma + \frac{2\delta + 1}{\pi i} \log q}{2\alpha + 1 + \frac{2\gamma}{\pi i} \log q}.$$

De ce que q, q_1 sont en valeur absolue inférieurs à 1, il résulte que la seconde coordonnée de $\frac{1}{\pi i} \log q$ aussi bien que de $\frac{1}{\pi i} \log q_1$ est positive, et cette dernière conclusion ne peut trouver place à la suite de la première que si $(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma$ a une valeur positive. On doit donc avoir

$$(13) \quad (2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1.$$

Si on prend donc $q = \Psi(t)$, ce qui précède démontre que: si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ représentent des nombres entiers satisfaisant à la relation (13) toutes les valeurs de q satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 = t$$

pour une valeur donnée de t , sont comprises dans la formule

$$e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \Psi(t)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta \log \Psi(t)} \cdot \pi i}.$$

Cependant il faut excepter les valeurs $t = 0, 1, \infty$.

Mais il reste encore à rechercher, si au moyen de cette formule on obtient toujours une valeur de q satisfaisant à l'équation en question, lorsqu'on y remplace $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par des nombres entiers quelconques, satisfaisant à la condition énoncée. Il en est effectivement ainsi, cela est facile à établir par la théorie de la transformation dite linéaire des

fonctions θ ; mais cela peut aussi se montrer par l'emploi des formules de réduction des fonctions elliptiques d'argument ui et de module k aux fonctions d'argument u et de module $k' = \sqrt{1 - k^2}$. C'est ce que je ferai dans ce qui suivra.

4.

À l'aide des relations

$$\begin{aligned} f_1^2(u, q) + f^2(u, q) &= 1 \\ f_2^2(u, q) + t f^2(u, q) &= 1 \end{aligned} \quad t = \left[\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right]^4$$

qu'on peut déduire des équations (7) du § 3, ou même directement des formules (D) qu'on trouve dans le traité de JACOBI p. 511, on tire des équations citées d'abord les suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u, q)}{\partial u f_1(u, q)} &= \frac{f_2(u, q)}{f_1^2(u, q)} \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{f_1(u, q)} &= - \frac{f_2(u, q) f_1'(u, q)}{f_1^2(u, q)} \\ \frac{\partial f_2(u, q)}{\partial u f_1(u, q)} &= (1 - t) \frac{f_1'(u, q)}{f_1^2(u, q)}. \end{aligned}$$

Si on remplace dans ces équations u par ui , q par q' et si on détermine q' de manière que

$$1 = \left(\frac{\theta_2(0, q')}{\theta_3(0, q')} \right)^4 + \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(ui, q')}{\partial u i f_1(ui, q')} &= - \frac{1}{f_1(ui, q')} \cdot \frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')} \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{f_1(ui, q')} &= - \frac{f_2'(ui, q')}{i f_1(ui, q')} \cdot \frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')} \\ \frac{\partial f_2(ui, q')}{\partial u f_1(ui, q')} &= - \frac{t}{f_1(ui, q')} \cdot \frac{f_1'(ui, q')}{i f_1(ui, q')}. \end{aligned}$$

Dans ces équations t a la même signification que dans les équations (7) du § 3, de manière qu'elles subsistent lorsqu'on remplace

$$f(u, q), \quad f_1(u, q), \quad f_2(u, q)$$

respectivement par

$$\frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')}, \quad \frac{1}{f_1(ui, q')}, \quad \frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')}.$$

Si on répète alors les raisonnements au moyen desquels nous avons établi précédemment les équations (8) du § 3, il en résulte que ces dernières fonctions sont identiques avec les premières.

On a donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u, q) = \frac{f(ui, q')}{if_1(ui, q')} \\ f_1(u, q) = \frac{1}{f_1(ui, q')} \\ f_2(u, q) = \frac{f_2(ui, q')}{f_1(ui, q')} \end{array} \right.$$

les deux quantités q et q' étant liées par l'équation

$$(2) \quad \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 + \left(\frac{\theta_2(0, q')}{\theta_3(0, q')} \right)^4 = 1.$$

On peut maintenant regarder t comme une variable indépendante et désigner par $F(t)$ ce que devient la fonction $\theta_3^2(0, q)$ par la substitution $q = \mathcal{V}(t)$. Alors, comme il ressort des formules (9) du § 3, si on donne à la grandeur t une valeur quelconque comprise entre 0 et 1, et si on prend $q = \mathcal{V}(t)$, $q' = \mathcal{V}(1-t)$, la plus petite valeur positive de la grandeur u pour laquelle $f(u, q) = 0$ est égale à $\pi F(t)$, et la plus petite valeur positive de la même grandeur pour laquelle $f(ui, q')$ s'annule est égale à $-\pi F(1-t) \log \mathcal{V}(1-t)$, et on a en vertu des relations (1) l'égalité

$$(3) \quad \pi F(t) = -\pi F(1-t) \log \mathcal{V}(1-t)$$

d'où résulte si on remplace t par $(1-t)$

$$(4) \quad \pi F(1-t) = -F(t) \log \Psi(t)$$

$$(5) \quad \log \Psi(t) \cdot \log \Psi(1-t) = \pi^2.$$

Désignons maintenant par τ une quantité à laquelle on ne peut attribuer que des valeurs complexes dont la seconde coordonnée est *positive*. De plus, comme dans les *Formeln und Lehrsätze*, soient

$$\theta_0(\nu | \tau), \quad \theta_1(\nu | \tau), \quad \theta_2(\nu | \tau), \quad \theta_3(\nu | \tau)$$

ce que deviennent les fonctions

$$\theta(x, q), \quad \theta_1(x, q), \quad \theta_2(x, q), \quad \theta_3(x, q)$$

par les substitutions

$$x = \nu \pi, \quad q = e^{\pi i}, \quad \sqrt[q]{q} = e^{\frac{1}{4} \pi i}$$

alors chacune des dernières fonctions est une fonction analytique uniforme des variables indépendantes ν, τ , si on limite le domaine de τ d'après les conventions faites, tandis que ν peut prendre toutes les valeurs à l'exception de ∞ .

Si on donne ensuite à la quantité τ une valeur quelconque dont la première coordonnée est nulle de manière que $\frac{\tau}{i}$ ait une valeur réelle comprise entre 0 et $+\infty$ et en même temps si on pose

$$q = e^{\pi i}, \quad t = \left(\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)} \right)^4 = \left(\frac{\theta_2(0 | \tau)}{\theta_3(0 | \tau)} \right)^4$$

t et q sont tous les deux réels et compris entre 0 et 1.

Il en résulte que

$$\pi i = \log \Psi(t)$$

parce que à une valeur de t réelle, comprise entre 0 et 1, comme il a été démontré dans § 1 correspond seulement une valeur de q comprise dans le même intervalle, et à celle-ci seulement une valeur de τ pour laquelle $\frac{\tau}{i}$ est réel. Si on pose donc

$$\tau' \pi i = \log \Psi(1-t)$$

on a d'après l'équation (5)

$$\tau\tau' = -1$$

et d'après l'équation (4)

$$\theta_3^2(\circ | \tau) = \frac{i}{\tau} \theta_3^2\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right).$$

De plus on a

$$\left(\frac{\theta_2\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right)}{\theta_3\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right)}\right)^4 = 1 = \frac{\theta_2^4(\circ | \tau)}{\theta_3^4(\circ | \tau)} = \frac{\theta_1^4(\circ | \tau)}{\theta_3^4(\circ | \tau)}$$

et aussi

$$\theta_0^4(\circ | \tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2 \theta_2^4\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right)$$

et par suite encore

$$\theta_2^4(\circ | \tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2 \theta_0^4\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right).$$

Comme $\frac{i}{\tau}$, $\theta_0(\circ | \tau)$, $\theta_0\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right)$ etc. sont des quantités toutes positives, il vient

$$(6) \quad \begin{cases} \theta_0(\circ | \tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_2\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right) \\ \theta_2(\circ | \tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_0\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right) \\ \theta_3(\circ | \tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_1\left(\circ \mid -\frac{1}{\tau}\right) \end{cases}$$

Ces équations ont été obtenues dans l'hypothèse que $\frac{\tau}{i}$ a une valeur réelle comprise entre 0 et $+\infty$. Mais comme toutes les fonctions précédentes sont des fonctions uniformes analytiques de τ lorsque la valeur de $\left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$ est fixée comme on l'a supposé dans § 2, par suite ce qui précède démontre l'exactitude de l'équation pour toute valeur de τ .

Des expressions des fonctions θ résultent immédiatement les relations suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} \theta_0(\circ | \tau) = \theta_0(\circ | \tau + 1) \\ \theta_2(\circ | \tau) = i^{-\frac{1}{2}} \theta_2(\circ | \tau + 1) \\ \theta_3(\circ | \tau) = \theta_3(\circ | \tau + 1). \end{cases}$$

De (7) on tire encore

$$(8) \quad \begin{cases} \theta_0(\circ | \tau) = \theta_0(\circ | \tau + 2) \\ \theta_2(\circ | \tau) = -i\theta_2(\circ | \tau + 2) \\ \theta_3(\circ | \tau) = \theta_3(\circ | \tau + 2). \end{cases}$$

De plus on tire de (6) en transformant les fonctions θ du second membre en fonctions de $(-\frac{1}{\tau} - 2)$ et celles-ci en fonctions de $\frac{\tau}{1+2\tau}$

$$(9) \quad \begin{cases} \theta_0(\circ | \tau) = i \left(\frac{1}{1+2\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_0\left(\circ | \frac{\tau}{1+2\tau}\right) \\ \theta_2(\circ | \tau) = \left(\frac{1}{1+2\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_2\left(\circ | \frac{\tau}{1+2\tau}\right) \\ \theta_3(\circ | \tau) = \left(\frac{1}{1+2\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_3\left(\circ | \frac{\tau}{1+2\tau}\right). \end{cases}$$

Si dans (8) on remplace τ par $\tau - 2$ et dans (9) par $\frac{\tau}{1-2\tau}$ il vient encore

$$(10) \quad \begin{cases} \theta_0(\circ | \tau) = \theta_0(\circ | \tau - 2) \\ \theta_2(\circ | \tau) = i\theta_2(\circ | \tau - 2) \\ \theta_3(\circ | \tau) = \theta_3(\circ | \tau - 2) \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \theta_0(\circ | \tau) = i \left(\frac{1}{1-2\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_0 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1-2\tau} \right. \right) \\ \theta_2(\circ | \tau) = \left(\frac{1}{1-2\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_2 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1-2\tau} \right. \right) \\ \theta_3(\circ | \tau) = \left(\frac{1}{1-2\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_3 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1-2\tau} \right. \right). \end{cases}$$

De ces équations (7—11) on déduit les suivantes dans lesquelles g et h désignent des nombres entiers quelconques :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\theta_2(\circ | \tau)}{\theta_3(\circ | \tau)} = i^{-g} \frac{\theta_2(\circ | \tau + 2g)}{\theta_3(\circ | \tau + 2g)}, & \frac{\theta_0(\circ | \tau)}{\theta_3(\circ | \tau)} = \frac{\theta_0(\circ | \tau + 2g)}{\theta_3(\circ | \tau + 2g)} \\ \frac{\theta_2(\circ | \tau)}{\theta_3(\circ | \tau)} = \frac{\theta_2 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1+2h\tau} \right. \right)}{\theta_3 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1+2h\tau} \right. \right)}, & \frac{\theta_0(\circ | \tau)}{\theta_3(\circ | \tau)} = i^h \frac{\theta_0 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1+2h\tau} \right. \right)}{\theta_3 \left(\circ \left| \frac{\tau}{1+2h\tau} \right. \right)} \\ \frac{\theta_2(\circ | \tau)}{\theta_3(\circ | \tau)} = i^{-g} \frac{\theta_2 \left(\circ \left| \frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau} \right. \right)}{\theta_3 \left(\circ \left| \frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau} \right. \right)}, & \frac{\theta_0(\circ | \tau)}{\theta_3(\circ | \tau)} = i^h \frac{\theta_0 \left(\circ \left| \frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau} \right. \right)}{\theta_3 \left(\circ \left| \frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau} \right. \right)}. \end{cases}$$

Admettons maintenant que a, b, c, d soient quatre nombres entiers donnés entre lesquels existe la relation $ad - bc = 1$, que b et c soient pairs, a et d par suite impairs. Si on remplace dans les deux dernières des équations précédentes

$$\tau \text{ par } \tau_1 = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \quad \text{et } g \text{ et } h \text{ par } -g, -h$$

et si on pose

$$c_1 = c - 2ga, \quad d_1 = d - 2gb, \quad a_1 = a - 2hc_1,$$

$$b_1 = b - 2hd_1, \quad \tau_2 = \frac{c_1 + d_1\tau}{a_1 + b_1\tau}$$

$$\frac{\theta_2(\circ | \tau_1)}{\theta_3(\circ | \tau_1)} = i^g \frac{\theta_2(\circ | \tau_2)}{\theta_3(\circ | \tau_2)}, \quad \frac{\theta_0(\circ | \tau_1)}{\theta_3(\circ | \tau_1)} = i^{-h} \frac{\theta_0(\circ | \tau_2)}{\theta_3(\circ | \tau_2)}.$$

Mais si on désigne par ε celui des nombres 1 ou -1 qui est congruent à $a \pmod{4}$, on a

$$\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} \equiv g \pmod{4}$$

et de plus, par suite de l'équation

$$ad - bc = 1, \quad d \equiv a \pmod{4} \quad \text{et} \quad d_1 \equiv d \equiv \varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon b}{2} - \frac{\varepsilon b_1}{2} \equiv h \pmod{4}.$$

Par suite on a

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} | \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} | \tau_2)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau_2)}, \quad i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} | \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} | \tau_2)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau_2)}. \end{array} \right.$$

Par suite entre les nombres a_1, b_1, c_1, d_1 existe la relation

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$$

et on a

$$a_1 \equiv a \equiv \varepsilon \pmod{4}.$$

De là résulte encore ceci.

Si en désignant par g, h, g_1, h_1, g_2, h_2 , etc., des nombres entiers arbitraires, on pose

$$\begin{aligned} c_1 &= c - 2ga, & d_1 &= d - 2gb, & a_1 &= a - 2hc_1, & b_1 &= b - 2hd_1 \\ c_2 &= c_1 - 2g_1 a_1, & d_2 &= d_1 - 2g_1 b_1, & a_2 &= a_1 - 2h_1 c_2, & b_2 &= b_1 - 2h_1 d_2 \\ c_3 &= c_2 - 2g_2 a_2, & d_3 &= d_2 - 2g_2 b_2, & a_3 &= a_2 - 2h_2 c_3, & b_3 &= b_2 - 2h_2 d_3 \end{aligned}$$

etc.

et

$$\tau_2 = \frac{c_1 + d_1 \tau}{a_1 + b_1 \tau}, \quad \tau_3 = \frac{c_2 + d_2 \tau}{a_2 + b_2 \tau}, \quad \tau_4 = \frac{c_3 + d_3 \tau}{a_3 + b_3 \tau}, \quad \text{etc.}$$

alors $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots$ sont des nombres pairs, $a_1, d_1, a_2, d_2, \dots$ sont des nombres impairs entre lesquels existent les relations

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1, \quad \dots$$

et on a

$$i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_2)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_2)} = i^{-\frac{\varepsilon c_2}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_3)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_3)} = i^{-\frac{\varepsilon c_3}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_4)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_4)} = \dots$$

$$i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} \mid \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} \mid \tau_2)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_2)} = i^{\frac{\varepsilon b_2}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} \mid \tau_3)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_3)} = i^{\frac{\varepsilon b_3}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} \mid \tau_4)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_4)} = \dots$$

Si b n'est pas nul, et qu'on détermine, ce qui est toujours possible, les nombres g et h de manière que

$$|d_1| < |b|$$

et

$$|b_1| < |d_1|$$

par suite on a

$$|b_1| < |b|.$$

Si b_1 est aussi différent de zéro, et qu'on détermine maintenant g_1, h_1 de manière que

$$|b_2| < |b_1|$$

et ensuite si b_2 est différent de zéro, qu'on prenne encore g_2, h_2 de manière que

$$|b_3| < |b_2|, \text{ etc.}$$

on voit qu'en continuant de cette manière on arrive nécessairement à une expression τ_r dans laquelle $b_{r-1} = 0$. Par suite de l'équation

$$a_{r-1}d_{r-1} - b_{r-1}c_{r-1} = 1,$$

et comme $a, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ sont tous $\equiv \varepsilon \pmod{4}$, on a alors

$$a_{r-1} = \varepsilon, \quad d_{r-1} = \varepsilon, \quad \tau_r = \varepsilon c_{r-1} + \tau,$$

et par suite en vertu de (12)

$$i^{-\frac{\varepsilon c_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_r)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_r)} = \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau)}, \quad i^{\frac{\varepsilon b_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} \mid \tau_r)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_r)} = \frac{\theta_0(\mathcal{O} \mid \tau)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau)}.$$

Ainsi on a donc enfin

$$(14) \quad \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_1)} = i^{\frac{zc}{2}} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau)}, \quad \frac{\theta_6(\mathcal{O} \mid \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_1)} = i^{-\frac{zh}{2}} \cdot \frac{\theta_6(\mathcal{O} \mid \tau)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau)}.$$

Si on pose

$$\tau = \frac{1}{\pi i} \log \mathcal{W}(t)$$

il résulte de la première de ces équations

$$\left(\frac{\theta_2(\mathcal{O} \mid \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} \mid \tau_1)} \right)^4 = t$$

ou

$$(15) \quad \left(\frac{\theta_2(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} \right)^4 = t$$

si on pose

$$(16) \quad q = e^{\tau_1 \pi i} = e^{\frac{c\pi i + d \log \mathcal{W}(t)}{a\pi i + b \log \mathcal{W}(t)} \cdot \pi i}.$$

Ceci démontre la proposition énoncée à la fin du § 3, et on peut énoncer d'une manière en quelque sorte plus précise le théorème:

Pour toute valeur donnée de la variable t , il y a une infinité de valeurs de la quantité q qui satisfont à l'égalité

$$t = \left(\frac{\theta_2(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} \right)^4;$$

elles sont toutes fournies par la formule

$$q = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \mathcal{W}(t)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta \log \mathcal{W}(t)} \cdot \pi i}$$

dans laquelle α , β , γ , δ représentent des nombres entiers devant satisfaire à la condition

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1,$$

mais qui ne sont soumis à aucune autre restriction. (La valeur du logarithme de $\mathcal{W}(t)$ peut être fixée arbitrairement dans la formule précédente.)

5.

Si maintenant on donne à la grandeur q une quelconque des valeurs qu'elle peut prendre d'après la formule précédente, si on pose $t = k^2$, en exceptant les valeurs singulières $k^2 = 0, 1, \infty$, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta_1(0, q)}{\theta_2(0, q)} \frac{\theta_1(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \cos \operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta(0, q)}{\theta_2(0, q)} \frac{\theta_2(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \Delta \operatorname{am}(u, k) = \frac{\theta(0, q)}{\theta_3(0, q)} \frac{\theta_3(x, q)}{\theta(x, q)} \end{array} \right.$$

avec

$$(2) \quad x = \frac{u}{\theta_2^2(0, q)}.$$

Sous cette forme $\sin \operatorname{am}(u, k)$, $\cos \operatorname{am}(u, k)$, $\Delta \operatorname{am}(u, k)$ nous apparaissent comme des fonctions uniformes de u et q , par suite de la disparition du radical $\sqrt[4]{q}$ qui figure dans $\theta_1(x, q)$, $\theta_2(x, q)$, $\theta_2(0, q)$. Mais si on exprime $\frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)}$, $\frac{\theta_1(0, q)}{\theta_3(0, q)}$ au moyen de k^2 , il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \operatorname{am}(u, k) = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_1(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \cos \operatorname{am}(u, k) = \frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_2(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \Delta \operatorname{am}(u, k) = \frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_3(x, q)}{\theta(x, q)}. \end{array} \right.$$

Il nous reste encore à déterminer quelle valeur nous devons choisir pour les radicaux $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\sqrt[4]{q}$. Pour cela quelques éclaircissements concernant les fonctions $\mathcal{U}'(t)$, $\log \mathcal{U}'(t)$ sont encore nécessaires.

Si on excepte du domaine de la variable t les valeurs appartenant à l'intervalle $(1 \dots +\infty)$, alors $\Psi(t)$ est une fonction uniforme et continue de t , qui en outre, comme son module est constamment inférieur à 1 possède les propriétés suivantes.

1°. Elle a une valeur réelle ou complexe suivant que t est réel ou complexe.

2°. Dans le premier cas elle est de même signe que t .

3°. Pour toute valeur complexe de t sa seconde coordonnée est de même signe que la seconde coordonnée de t .

La première propriété résulte immédiatement des équations

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{16}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{16}}} \right)^{4n+1}$$

$$t = \left(\frac{\theta_2[0, \Psi(t)]}{\theta_4[0, \Psi(t)]} \right)^4 = 16\Psi(t) \cdot \left(\frac{1 + \Psi^2(t) + \Psi^4(t) + \dots}{1 + 2\Psi(t) + 2\Psi^3(t) + \dots} \right)^4.$$

La première montre que $\Psi(t)$ est toujours réelle pour des valeurs de t réelles appartenant à l'intervalle $(-\infty \dots 1)$, l'autre montre qu'inversement, lorsque $\Psi(t)$ a une valeur réelle, t est aussi réel, et compris d'après l'hypothèse faite entre $-\infty$ et 1. De la seconde équation résulte l'exactitude de la proposition (2). La troisième se démontre comme il suit.

Pour

$$t = 1 + i, \quad \text{on a} \quad \log(1-t) = -\frac{\pi}{2}i.$$

par suite

$$\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{16}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{16}}} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{8}i}}{1 + e^{-\frac{\pi}{8}i}} = itg \frac{\pi}{16}$$

et dès lors comme les r_n sont tous des nombres positifs, $\Psi(t)$ est égale au produit de i et d'une quantité positive. De la valeur $1 + i$, t peut passer d'une manière continue à toute autre valeur complexe t_1 , dont la seconde coordonnée est positive, sans pour cela traverser une valeur réelle. La seconde coordonnée de $\Psi(t)$ varie constamment avec t pendant ce passage sans devenir nulle (§ 1), et par suite est positive pour $t = t_1$.

comme pour $t = 1 + i$. D'une manière toute semblable on montrera que $\Psi(t)$ pour $t = 1 - i$ est égalé au produit de i par une quantité négative et de là résulte la parité de signe de la seconde coordonnée de $\Psi(t)$ avec la seconde coordonnée de t même dans le cas où cette dernière est négative. Du reste il résulte de la signification donnée plus haut à $(1 - t)^{\frac{1}{4}}$ et du § 1 qu'à des valeurs complexes conjuguées de t correspondent des valeurs complexes aussi conjuguées pour $(1 - t)^{\frac{1}{4}}$ et $\Psi(t)$, et par suite il suffit d'établir la 3^{ème} propriété de la fonction $\Psi(t)$ pour des valeurs de t dont la seconde coordonnée est positive.

Faisons encore ici la remarque suivante.

Si on pose

$$\zeta(t) = \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}$$

on a

$$1 - t = \left(\frac{1 - \zeta(t)}{1 + \zeta(t)} \right)^4$$

et on peut montrer à l'aide de ces deux équations que les 3 propriétés précédentes s'appliquent également à la fonction $\zeta(t)$; il n'y a qu'à remplacer dans les démonstrations précédentes partout $\Psi(t)$ par $\zeta(t)$.

D'après ce qui précède, si on excepte du domaine de la variable t encore les valeurs réelles appartenant à l'intervalle $-\infty \dots 0$, non seulement $\zeta(t)$, $\Psi(t)$ mais encore

$$\log \zeta(t), \quad \log \Psi(t),$$

sont des fonctions uniformes et continues de t . De l'équation précédente (§ 2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n t^n = e^{\log 2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n t^n}$$

il résulte, si on remplace t par $\zeta^4(t)$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \zeta(t) e^{\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{4n}(t)}$$

et par suite

$$\log \psi(t) = \log \left(\frac{1}{2} \varphi(t) \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi^{4n}(t) + 2m\pi i$$

où m représente un nombre entier, qui à l'intérieur du domaine assignée maintenant à la quantité t , ne peut pas avoir différentes valeurs à cause de la continuité des fonctions $\varphi(t)$, $\log \left(\frac{1}{2} \varphi(t) \right)$, $\log \psi(t)$. Pour toutes les valeurs réelles de t comprises entre 0 et 1, ces trois fonctions sont toutes réelles, et par suite $m = 0$; on a donc l'équation

$$(4) \quad \log \psi(t) = \log \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}}{\frac{1}{2} \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}} \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}$$

pour toutes les valeurs de t non exceptées, à la condition que les valeurs des logarithmes soient déterminées, comme on l'a établi dans § 2. Si maintenant on donne à la quantité t une valeur réelle comprise entre 1 et $+\infty$, l'équation précédente persiste encore, si on donne au radical $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ l'une ou l'autre des deux valeurs qu'elle peut alors prendre, et si on donne en même temps à la fonction $\psi(t)$ la valeur correspondante.

Pour une valeur réelle négative de t , on a enfin

$$\lim_{k \rightarrow 0} \log \psi(t \pm ik) = \log [-\psi(t)] \pm \pi i,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \log \varphi(t \pm ik) = \log [-\varphi(t)] \pm \pi i$$

(où k représente une quantité positive), et par suite

$$(5) \quad \log [-\psi(t)] = \log \left(-\frac{\frac{1}{2} \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}}{\frac{1}{2} \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}} \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}.$$

Ceci établi, si on définit maintenant les valeurs des puissances

$$(k^2)^{\frac{1}{4}}, \quad (1 - k^2)^{\frac{1}{4}}, \quad \psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$$

comme on l'a établi dans § 2, il résulte des équations

$$k^2 = \left(\frac{\theta_2[0, \psi(k^2)]}{\theta_3[0, \psi(k^2)]} \right)^4, \quad 1 - k^2 = \left(\frac{\theta[0, \psi(k^2)]}{\theta_3[0, \psi(k^2)]} \right)^4$$

dans l'hypothèse préalable où ni k^2 ni $1 - k^2$ n'ont de valeurs réelles appartenant à l'intervalle $(-\infty \dots 0)$, si on remplace dans $\theta_2[0, \psi(k^2)]$ le radical $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ par la valeur $\psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$

$$(6) \quad (k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\theta_2[0, \psi(k^2)]}{\theta_3[0, \psi(k^2)]}, \quad (1 - k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\theta[0, \psi(k^2)]}{\theta_3[0, \psi(k^2)]}.$$

Car ces équations ont lieu lorsque k^2 est une valeur comprise entre 0 et 1; comme $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$, $\theta_2[0, \psi(k^2)]$, $\theta_3[0, \psi(k^2)]$, $\theta[0, \psi(k^2)]$ sont toutes des fonctions analytiques uniformes de k^2 , elles subsistent encore pour toute valeur complexe de k^2 , si on excepte du domaine de cette grandeur, les valeurs réelles appartenant aux intervalles $(-\infty \dots 0)$ et $(1 \dots +\infty)$.

De plus comme la seconde coordonnée de $\psi(k^2)$ d'après ce qui précède a le même signe que la seconde coordonnée de k^2 ,

$$\log \psi(k^2) - \log(k^2)$$

tend vers une limite réelle lorsque k^2 s'approche indéfiniment d'une quantité réelle négative; et de même

$$\frac{\psi(k^2)^{\frac{1}{4}}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

tend vers une limite positive. La première des équations (6) subsiste donc encore pour une valeur négative de k^2 , à la condition qu'après avoir fixé la valeur de $(k^2)^{\frac{1}{4}}$ on donne au radical $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ celle de ses valeurs pour laquelle

$$\frac{\sqrt[4]{\psi(k^2)}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

est une quantité positive. La seconde des équations (6) subsiste en tous cas pour une valeur négative de k^2 , puisque pour une telle valeur $q(k^2)$ est réelle et par suite $\theta[0, q(k^2)]$, $\theta_3[0, q(k^2)]$, aussi bien que $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$ sont des quantités positives.

Enfin pour une valeur réelle de k^2 située entre 1 et $+\infty$, les équations en question subsistent encore, si après avoir fixé la valeur de $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$ on prend pour $q(k^2)$ la valeur correspondante.

D'après cela les équations précédentes (3) existent, si l'on fixe les valeurs des radicaux $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1 - k^2}$ de manière que dans chacun d'eux la première coordonnée soit positive, et ne soit pas en valeur absolue inférieure à la seconde coordonnée, ⁽¹⁾ si de plus on pose

$$q = q(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\frac{1 - \sqrt[4]{1 - k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - k^4}} \right)^{4n+1}$$

et enfin si on détermine encore la valeur de $\sqrt[4]{q}$, de manière que sa première coordonnée soit positive et ne soit pas en valeur absolue inférieure à sa seconde, ce qui, dans le cas où k^2 et par suite q ont une valeur négative, donne la condition à remplir que $\frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{k^2}}$ doit être une quantité positive.

De plus, en conservant les valeurs ainsi déterminées pour les quantités $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1 - k^2}$, $q(k^2)$, et après avoir pris 4 nombres α , β , γ , δ , entiers satisfaisant à la condition

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1,$$

posons

$$\tau = \frac{1}{\pi i} \log q(k^2), \quad \tau_1 = \frac{2\gamma + (2\delta + 1)\tau}{2\alpha + 1 + 2\beta\tau}.$$

$$q = e^{\tau_1 \pi i}, \quad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4} \tau_1 \pi i},$$

⁽¹⁾ D'après cette détermination $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1 - k^2}$ ont les mêmes valeurs que les puissances $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$; cela résulte immédiatement de la définition donnée pour ces dernières expressions dans § 2.

d'où, dans le cas où k^2 est une quantité négative, il faut prendre pour $\log \psi(k^2)$ la valeur pour laquelle $e^{\frac{1}{4} \log \eta(k^2)}$ est égale à la valeur déterminée précédemment pour $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$. Alors, en vertu des équations (14) du paragraphe précédent, si on désigne par ε l'un des deux nombres 1, -1 auquel $2\alpha + 1$ soit congruent (mod 4), on a

$$\frac{\theta_2(\mathcal{O} | \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau_1)} = i^{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\theta_2(\mathcal{O} | \tau)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau)}, \quad \frac{\theta_0(\mathcal{O} | \tau_1)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau_1)} = i^{-\varepsilon\beta} \cdot \frac{\theta_0(\mathcal{O} | \tau)}{\theta_3(\mathcal{O} | \tau)}$$

et par suite

$$(8) \quad \frac{\theta_2(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} = i^{\varepsilon\gamma} \sqrt[4]{k^2}, \quad \frac{\theta_0(\mathcal{O}, q)}{\theta_3(\mathcal{O}, q)} = i^{-\varepsilon\beta} \sqrt[4]{1 - k^2}$$

et les équations (1) deviennent

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \operatorname{am}(u, k) &= \frac{i^{-\varepsilon\gamma}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_1(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \cos \operatorname{am}(u, k) &= \frac{i^{-\varepsilon\beta} \sqrt[4]{1 - k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\theta_2(x, q)}{\theta(x, q)} \\ \Delta \operatorname{am}(u, k) &= i^{-\varepsilon\beta} \sqrt[4]{1 - k^2} \cdot \frac{\theta_3(x, q)}{\theta(x, q)} \\ x &= \frac{u}{\theta_3^2(\mathcal{O}, q)}, \quad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \eta(k^2)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta \log \psi(k^2)} \cdot \frac{\pi i}{4}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi se trouve résolu le problème qu'il fallait résoudre pour terminer la théorie des fonctions elliptiques développée dans le mémoire de JACOBI. Il reste cependant encore une question à traiter. La série indéfinie, par laquelle se trouve exprimée la fonction $\psi(t)$ n'est que faiblement convergente, lorsque la valeur absolue de la quantité $(1 - t)$ est petite, lorsque t a une valeur peu différente de 1. Il est par suite d'une importance essentielle, de déduire, comme nous allons le montrer, de cette série infinie d'autres expressions de $\psi(t)$, desquelles, l'une au moins se prête très-facilement au calcul de $\psi(t)$, quelle que soit la valeur de $\psi(t)$.

6.

A la condition qu'on excepte du domaine de la variable t les valeurs réelles appartenant à l'intervalle $(1 \dots + \infty)$, $\mathcal{V}(t)$ n'est pas seulement, comme on l'a montré dans le paragraphe précédent, une fonction définie uniforme et continue, mais encore une fonction se comportant partout régulièrement.⁽¹⁾ Cela est évident, si on considère que, dans le domaine auquel est limitée par la condition imposée la variation de t ,

$$\varphi(t) = \frac{1 - (1 - t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - t)^{\frac{1}{4}}}$$

est une fonction définie uniforme et régulière, et que la série procédant suivant les puissances de $\varphi(t)$, qui représente la fonction $\mathcal{V}(t)$ est uniformément convergente dans le voisinage de toute valeur de t déterminée.

Si on excepte de plus du domaine de la quantité t les valeurs réelles négatives, alors dans le domaine auquel est limitée la variation de t — (on peut le désigner par T') — $\mathcal{V}(t)$ ne peut ni s'annuler ni recevoir une valeur négative; dans ce domaine $\log \mathcal{V}(t)$ est donc aussi une fonction définie uniforme et régulière.

De cette propriété de $\log \mathcal{V}(t)$, résulte que l'équation

$$(1) \quad \log \mathcal{V}(t) \cdot \log \mathcal{V}(1 - t) = \pi^2$$

établie dans le § 4 dans l'hypothèse où t est une quantité réelle comprise entre 0 et 1 subsiste pour toute valeur de t appartenant au domaine T' .

En effet comme non-seulement $\log \mathcal{V}(t)$, mais encore $\log \mathcal{V}(1 - t)$ se comporte partout régulièrement à l'intérieur de T' , par suite l'expression

$$\log \mathcal{V}(t) \cdot \log \mathcal{V}(1 - t) - \pi^2$$

(1) Je dis d'une fonction définie uniforme de la variable t qu'elle se comporte régulièrement dans le voisinage d'une valeur déterminée t_0 , lorsque, pour toutes les valeurs de t comprises à l'intérieur d'un certain contour autour du point t_0 , on peut la représenter par une série ordinaire suivant les puissances de $t - t_0$.

peut se représenter sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $t - t_0$, à l'intérieur d'un certain contour autour de t_0 , t_0 étant une valeur quelconque déterminée de t .

Si on prend t_0 dans l'intervalle $(0 \dots 1)$, comme il y a dans toute direction au voisinage de t_0 des valeurs de la quantité t pour lesquelles l'expression précédente s'annule, tous les coefficients de cette série sont nécessairement nuls; il doit donc en être ainsi pour toute autre valeur de t_0 et l'équation (1) doit subsister en tout point de T' d'après un théorème connu de la théorie des fonctions, le domaine T' formant un tout continu.

De plus, comme la seconde coordonnée de $\mathcal{V}(t)$ a le même signe que la seconde coordonnée de t , on a

$$\log \mathcal{V}(t) = \log [-\mathcal{V}(t)] \pm i\pi,$$

avec le signe $+$ où le signe $-$ devant i suivant que la seconde coordonnée de t est positive ou négative. Maintenant comme $\log [-\mathcal{V}(t)]$ se comporte régulièrement dans le voisinage de toute valeur réelle négative de t , on a

$$(2) \quad \begin{cases} \log \mathcal{V}(t^+) = \log [-\mathcal{V}(t)] + i\pi \\ \log \mathcal{V}(t^-) = \log [-\mathcal{V}(t)] - i\pi \end{cases}$$

pour toute valeur négative réelle de t . A l'aide de ces formules on tire de l'équation (1) pour une valeur réelle de $t > 1$

$$(3) \quad \begin{cases} \log \mathcal{V}(t^+) = \frac{\pi^2}{\log [-\mathcal{V}(1-t)] - i\pi} \\ \log \mathcal{V}(t^-) = \frac{\pi^2}{\log [-\mathcal{V}(1-t)] + i\pi} \end{cases}$$

Si on admet maintenant que t ait une valeur complexe, et si on désigne par ϵ le nombre 1 ou -1 , suivant que la seconde coordonnée de t est positive ou négative; alors

$$\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

si on remplace t par $1 - t$ se transforme en

$$\frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = - \frac{1 - \left(1 - \frac{t-1}{t}\right)^4}{1 + \left(1 - \frac{t-1}{t}\right)^4}.$$

On a par suite

$$(4) \quad \eta(1 - t) = - \eta\left(\frac{t-1}{t}\right);$$

d'où

$$(5) \quad \log \eta(1 - t) = \log \eta\left(\frac{t-1}{t}\right) - i\pi.$$

De plus l'équation (1), si on y remplace t par $\frac{t-1}{t}$, devient

$$(6) \quad \log \eta\left(\frac{t-1}{t}\right) \cdot \log \eta\left(\frac{1}{t}\right) = \pi^2.$$

Si dans (5) on remplace t par $\frac{t-1}{t}$, et si on remarque que la seconde coordonnée de $\frac{t-1}{t}$ a le même signe que la seconde coordonnée de t , il vient

$$(7) \quad \log \eta\left(\frac{1}{t}\right) = \log \eta\left(\frac{1}{1-t}\right) - i\pi.$$

Enfin il résulte de (1) si on remplace t par $\frac{1}{1-t}$

$$(8) \quad \log \eta\left(\frac{1}{1-t}\right) \cdot \log \eta\left(\frac{t}{t-1}\right) = \pi^2.$$

Les équations (1), (5), (6), (7), (8) conduisent aux suivantes, dans lesquelles il faut prendre devant i le signe supérieur ou inférieur, suivant que la seconde coordonnée de t est positive ou négative

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \psi(t) = \frac{\pi^2}{\log \psi(1-t)} \\ \log \psi(t) = \frac{\pi^2}{\log \psi\left(\frac{t-1}{t}\right) \mp i\pi} \\ \log \psi(t) = \frac{\pi \log \psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi \mp i \log \psi\left(\frac{1}{t}\right)} \\ \log \psi(t) = \frac{\pi^2}{\log \psi\left(\frac{1}{1-t}\right)} \pm i\pi \\ \log \psi(t) = \log \psi\left(\frac{t}{t-1}\right) \pm i\pi. \end{array} \right.$$

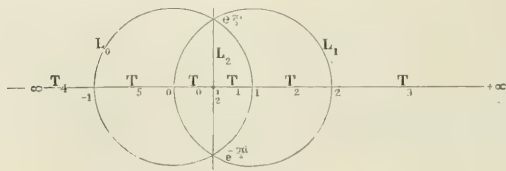
Il est facile d'après ce qui précède de découvrir ce que deviennent ces équations lorsque la seconde coordonnée de t s'annule.

Qu'on imagine maintenant dans le plan de la variable t un cercle L_0 de rayon 1 et de centre 0, un deuxième cercle L_1 de même rayon et ayant pour centre le point 1, et par les points d'intersection de L_0 et L_1 pour lesquels t a les valeurs $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$, une droite indéfinie L_2 . Ces trois lignes divisent le plan en six parties (T_0, T_1, \dots, T_5), de manière que les intervalles

$$\left(0 \dots \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} \dots 1\right), (1 \dots 2), (2 \dots +\infty), (-\infty \dots -1), (-1 \dots 0)$$

soient respectivement situés dans

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$$



si à chaque valeur de t on en fait correspondre deux autres t' et t'' au moyen des équations

$$t' + t = 1, \quad tt'' = 1,$$

aux valeurs de t situées dans les espaces

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$$

correspondront des valeurs de t' respectivement en

$$T_1, T_0, T_5, T_4, T_3, T_2$$

et de t'' en

$$T_3, T_2, T_1, T_0, T_5, T_4.$$

D'où découle facilement le théorème suivant.

Si t est situé en

$$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$$

alors en T_0 seront situés respectivement

$$1 - t, \quad \frac{t-1}{t}, \quad \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{1-t}, \quad \frac{t}{t-1}.$$

D'après les formules (9), le calcul de $\varphi(t)$ pour toute valeur donnée de t se ramène donc au calcul de la même fonction pour un argument relatif au domaine T_0 .

Pour des valeurs réelles de t , on appliquera donc les formules suivantes

$$t = \frac{1}{2} \dots 1 \quad \log \varphi(t) = \frac{\pi^2}{\log \varphi(1-t)}$$

$$t = 1 \dots 2 \quad \log \varphi(t) = \frac{\pi^2}{\log \varphi\left(\frac{t-1}{t}\right) - i\pi},$$

$$\log \varphi(\bar{t}) = \frac{\pi^2}{\log \varphi\left(\frac{t-1}{t}\right) + i\pi}$$

$$t = 2 \dots + \infty \quad \log \eta^+(t) = \frac{\pi \log \eta\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi - i \log \eta\left(\frac{1}{t}\right)},$$

$$\log \eta^-(t) = \frac{\pi \log \eta\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi + i \log \eta\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$t = -\infty \dots -1 \quad \log \eta^+(t) = \frac{\pi^2}{\log \eta\left(\frac{1}{1-t}\right)} + i\pi,$$

$$\log \eta^-(t) = \frac{\pi^2}{\log \eta\left(\frac{1}{1-t}\right)} - i\pi,$$

$$t = -1 \dots 0 \quad \log \eta^+(t) = \log \eta\left(\frac{t}{t-1}\right) + i\pi,$$

$$\log \eta^-(t) = \log \eta\left(\frac{t}{t-1}\right) - i\pi.$$

Il reste encore maintenant à rechercher quelle est la valeur la plus grande que peut prendre le module de

$$\varphi(t) = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

lorsque la quantité t est limitée au domaine T_0 .

Comme on le sait cette valeur la plus grande correspond à une valeur de t situé sur la limite de T_0 . La limite de T_0 est déterminée par le segment de la droite L_2 compris entre les deux points $e^{-\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{\pi i}{3}}$, et par l'arc du cercle L_1 limité par ces deux points et passant par le point 0.

Si, en désignant par w une quantité réelle, on pose

$$t = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \frac{1}{e^{iw} + 1}.$$

t parcourt la droite L_2 lorsque w parcourt l'intervalle $(-\pi \dots + \pi)$.

Alors $\frac{d \log |\varphi(t)|}{dw}$ est égale à la partie réelle de

$$\frac{d \log \varphi(t)}{dw} = \left(\frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{1}{4}} \right) \cdot \frac{d \log t}{dw};$$

par suite comme

$$1-t = \frac{e^{\frac{w}{2}}}{2 \cos \frac{w}{2}}, \quad \frac{d \log t}{dw} = -i e^{w i} = -i(1-t)$$

$$\frac{d |\varphi(t)|}{dw} = \frac{1}{2} |\varphi(t)| \cdot \left[\left(2 \cos \frac{w}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \sin \frac{w}{8} + \left(2 \cos \frac{w}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \sin \frac{3w}{8} \right].$$

A l'intérieur de l'intervalle ($w = -\pi \dots + \pi$) $\varphi(t)$ n'est ni nulle ni infinie; par suite $\frac{d |\varphi(t)|}{dw}$ s'annule pour $w = 0$ et est positive lorsque w est situé entre 0 et π , négative lorsque w est situé entre 0 et $-\pi$. Le module de $\varphi(t)$ est donc un minimum pour $w = 0$, et croit constamment lorsque t parcourt en croissant constamment l'intervalle $(0 \dots \pi)$, ou l'intervalle $(0 \dots -\pi)$ en décroissant constamment.

Pour $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$, comme $1 - e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, on a

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{\pi i}{12}}}{1 + e^{-\frac{\pi i}{12}}} = i \operatorname{tg} \frac{\pi}{24};$$

et pour $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$

$$\varphi(t) = -i \operatorname{tg} \frac{\pi}{24}.$$

La plus grande valeur du module de $\varphi(t)$ sur la droite joignant les deux points $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$ est donc égale à $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

. Si on pose encore

$$t = 1 - e^{-\pi i}$$

t parcourt le cercle L_1 lorsque w parcourt l'intervalle $(-\pi \dots + \pi)$. Alors on a

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{\pi i}{4}}}{1 + e^{-\frac{\pi i}{4}}} - i \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$$

et le module de $\varphi(t)$ est un minimum au point $w = 0$, $t = 0$, et un maximum au point $w = \pm \pi$, $t = 2$. La plus grande valeur qu'il peut prendre sur la partie de l'arc de cercle limitant T_0 , est donc obtenue aux points $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Ainsi donc on a démontré:

Le module de $\varphi(t)$ a dans le domaine T_0 sa plus grande valeur aux points $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ et ce maximum est égal à $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

Par suite pour toute valeur de t appartenant au domaine T_0 la série

$$\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{2}{2^5} \varphi(t)^5 + \frac{15}{2^9} \varphi(t)^9 + \frac{150}{2^{13}} \varphi(t)^{13} + \dots$$

est si rapidement convergente, qu'ordinairement dans la pratique les trois premiers termes, et dans beaucoup de cas les deux premiers donnent la valeur de la fonction $\Psi(t)$ avec une approximation suffisante.

7.

Si dans les séries qui définissent les fonctions $\theta_0(v|\tau)$, $\theta_1(v|\tau)$ etc., on remplace τ par $\epsilon + \tau$, ϵ désignant l'un des deux nombres 1, -1 on voit que les fonctions

$$\theta_0(v|\tau), \quad \theta_1(v|\tau), \quad \theta_2(v|\tau), \quad \theta_3(v|\tau)$$

sont égales respectivement aux fonctions

$$\theta_3(v|\epsilon + \tau), \quad i^{-\frac{\epsilon}{2}} \theta_1(v|\epsilon + \tau), \quad i^{-\frac{\epsilon}{2}} \theta_2(v|\epsilon + \tau), \quad \theta_0(v|\epsilon + \tau).$$

De plus si dans les équations (1) de § 4 on pose

$$\sqrt[4]{q} = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad \sqrt[4]{q'} = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad u = \theta_3^2(\mathbf{o}, q) \cdot v\pi, \quad ui = \theta_3^2(\mathbf{o}, q') \cdot v'\pi,$$

et si, au moyen des formules (6) du § 3, on exprime les fonctions $f(u, q)$, $f_1(u, q)$, $f_2(u, q)$, au moyen des fonctions $\theta(v\pi, q)$, $\theta_1(v\pi, q)$, les fonctions $f(ui, q')$, $f_1(ui, q')$, $f_2(ui, q')$ au moyen de $\theta(v'\pi, q')$ et de $\theta_1(v'\pi, q')$, et si on remarque que d'après les formules (6) du § 4, on a

$$\frac{\theta_3(\mathbf{o}, q)}{\theta_2(\mathbf{o}, q)} = \frac{\theta_3(\mathbf{o}, q')}{\theta(\mathbf{o}, q')}, \quad \frac{\theta(\mathbf{o}, q)}{\theta_1(\mathbf{o}, q)} = \frac{\theta_2(\mathbf{o}, q')}{\theta(\mathbf{o}, q')}, \quad \frac{\theta(\mathbf{o}, q)}{\theta_3(\mathbf{o}, q)} = \frac{\theta_3(\mathbf{o}, q')}{\theta_3(\mathbf{o}, q')},$$

$$\theta_3^2(\mathbf{o}, q) = \frac{i}{\tau} \theta_3^2(\mathbf{o}, q')$$

et par suite

$$v' = -\frac{v}{\tau},$$

on arrive au théorème suivant:

Le quotient de deux quelconques des fonctions

$$\theta_0(v|\tau), \quad \theta_1(v|\tau), \quad \theta_2(v|\tau), \quad \theta_3(v|\tau)$$

ne change pas de valeur si on remplace ces fonctions respectivement par les suivantes

$$\theta_2\left(-\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right), \quad \frac{1}{i}\theta_1\left(-\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right), \quad \theta_0\left(-\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right), \quad \theta_3\left(-\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right).$$

Maintenant posons comme plus haut (§ 5)

$$(1) \quad \tau_1 = \frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log \Psi(k^2)}{(2\alpha + 1)\pi i + 2\beta\log \Psi(k^2)}$$

et

$$(2) \quad \tau_2 = \frac{1}{-\tau_1}, \quad \tau_3 = c + \tau_2 = \frac{1 - c\tau_1}{-\tau_1}, \quad \tau_4 = \frac{1}{-\tau_3} = \frac{\tau_1}{1 - c\tau_1},$$

$$\tau_5 = c + \tau_4 = \frac{c}{1 - c\tau_1}, \quad \tau_6 = \frac{1}{-\tau_5} = -c + \tau_1,$$

$$(3) \quad v_1 = \frac{u}{\pi \theta_3^2(\mathbf{O} \mid \tau_1)}, \quad v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1}, \quad v_3 = v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1},$$

$$v_4 = \frac{v_3}{\tau_1} = -\frac{v_1}{\tau_1 \tau_3}, \quad v_5 = \mathfrak{C} v_4 = \frac{-\mathfrak{C} v_1}{\tau_1 \tau_3}, \quad v_6 = \frac{v_5}{\tau_5} = \frac{-\mathfrak{C} v_1}{\tau_1 \tau_3 \tau_5},$$

ou bien, comme on a d'après les formules (6, 7) du § 4

$$\theta_3^2(\mathbf{O} \mid \tau_1) = \frac{i}{\tau_1} \theta_3^2(\mathbf{O} \mid \tau_2) = \frac{i}{\tau_1} \theta_0^2(\mathbf{O} \mid \tau_3)$$

$$= -\frac{\mathbf{I}}{\tau_1 \tau_3} \theta_2^2(\mathbf{O} \mid \tau_4) = \frac{\mathfrak{C} i}{\tau_1 \tau_3} \theta_2^2(\mathbf{O} \mid \tau_5) = \frac{-\mathfrak{C}}{\tau_1 \tau_3 \tau_5} \theta_0^2(\mathbf{O} \mid \tau_6)$$

posons

$$(4) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{u}{\pi \theta_3^2(\mathbf{O} \mid \tau_1)}, & v_2 = \frac{u i}{\pi \theta_3^2(\mathbf{O} \mid \tau_2)}, & v_3 = \frac{u i}{\pi \theta_0^2(\mathbf{O} \mid \tau_3)}, \\ v_4 = \frac{u}{\pi \theta_2^2(\mathbf{O} \mid \tau_4)}, & v_5 = \frac{u i}{\pi \theta_2^2(\mathbf{O} \mid \tau_5)}, & v_6 = \frac{u}{\pi \theta_0^2(\mathbf{O} \mid \tau_6)}. \end{cases}$$

Maintenant si on change dans les équations (9) du § 5 les fonctions $\theta(x, q)$, $\theta_1(x, q)$, ... respectivement en

$$\theta_0(v_1, \tau_1), \quad \theta_1(v_1, \tau_1), \quad \theta_2(v_1, \tau_1), \quad \theta_3(v_1, \tau_1)$$

et si en appliquant plusieurs fois les deux théorèmes précédents, on remplace celles-ci au moyen de fonctions $-\theta$ d'arguments

$$(v_2, \tau_2), (v_3, \tau_3), \dots, (v_6, \tau_6)$$

on obtient les représentations suivantes des fonctions elliptiques $\sin am(u, k)$, $\cos am(u, k)$, $\Delta am(u, k)$, dans lesquelles ε , β , γ , $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ ont la même signification que dans les équations citées (9)

$$(5) \quad i^{\varepsilon} \sqrt[4]{k^2} \cdot \sin am(u, k) = \frac{\theta_1(v_1 \mid \tau_1)}{\theta_0(v_1 \mid \tau_1)} = \frac{\mathbf{I}}{i} \cdot \frac{\theta_1(v_2 \mid \tau_2)}{\theta_2(v_2 \mid \tau_2)} = \frac{\mathbf{I}}{i} \cdot \frac{\theta_1(v_3 \mid \tau_3)}{\theta_3(v_3 \mid \tau_3)}$$

$$= \frac{\theta_1(v_4 \mid \tau_4)}{\theta_0(v_4 \mid \tau_4)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \cdot \frac{\theta_1(v_5 \mid \tau_5)}{\theta_3(v_5 \mid \tau_5)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\theta_1(v_6 \mid \tau_6)}{\theta_3(v_6 \mid \tau_6)}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad i^{z(\beta+\gamma)} \sqrt[4]{k^2} \cdot \cos \operatorname{am}(u, k) &= \frac{\theta_2(v_1 | \tau_1)}{\theta_0(v_1 | \tau_1)} = \frac{\theta_0(v_2 | \tau_2)}{\theta_2(v_2 | \tau_2)} = i^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{\theta_3(v_3 | \tau_3)}{\theta_2(v_3 | \tau_3)} \\
 &= i^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{\theta_3(v_4 | \tau_4)}{\theta_0(v_4 | \tau_4)} = i^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{\theta_0(v_5 | \tau_5)}{\theta_3(v_5 | \tau_5)} = i^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(v_6 | \tau_6)}{\theta_3(v_6 | \tau_6)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \frac{i^{z\beta}}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \Delta \operatorname{am}(u, k) &= \frac{\theta_3(v_1 | \tau_1)}{\theta_0(v_1 | \tau_1)} = \frac{\theta_3(v_2 | \tau_2)}{\theta_2(v_2 | \tau_2)} = i^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{\theta_0(v_3 | \tau_3)}{\theta_2(v_3 | \tau_3)} \\
 &= i^{\frac{c}{2}} \cdot \frac{\theta_2(v_4 | \tau_4)}{\theta_0(v_4 | \tau_4)} = \frac{\theta_2(v_5 | \tau_5)}{\theta_3(v_5 | \tau_5)} = \frac{\theta_0(v_6 | \tau_6)}{\theta_3(v_6 | \tau_6)}.
 \end{aligned}$$

Il faut remarquer ici qu'on a

$$v_3 = v_2, \quad v_5 = \wp v_4, \quad v_6 = v_1.$$

Les quantités τ_1, \dots, τ_6 exprimées au moyen de τ sont de la forme

$$\frac{c + d\tau_1}{a + b\tau_1},$$

où chacun des nombres a, b, c, d a l'une des valeurs 0, 1, — 1 et entre lesquels existe la relation

$$ad - bc = 1$$

Exprimées au moyen de $\tau = \frac{1}{\pi i} \log \eta(k^2)$, elles prennent donc la forme

$$\frac{c + d\tau}{a + b\tau},$$

a, b, c, d étant des nombres entiers liés par la relation

$$ad - bc = 1.$$

Il est très-facile de montrer qu'inversement, si a, b, c, d sont quatre nombres entiers quelconques satisfaisant à l'égalité précédente, l'expression $\frac{c + d\tau}{a + b\tau}$, peut toujours être ramenée à l'une des 6 formes

$$\tau_1, \quad \frac{1}{-\tau_1}, \quad \frac{1 - c\tau_1}{-\tau_1}, \quad \frac{\tau_1}{1 - c\tau_1}, \quad \frac{c}{1 - c\tau_1}, \quad -c + \tau_1,$$

où τ_1 a la forme

$$\tau_1 = \frac{2\gamma + (2\delta + 1)\tau}{(2\alpha + 1) + 2\beta\tau},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre nombres entiers satisfaisant à l'égalité

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1.$$

On peut y prendre à volonté ϵ égal à 1 ou à -1.

En particulier si on prend $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ égaux à 0, par suite

$$\tau_1 = \frac{1}{\pi i} \log \eta(k^2)$$

et qu'on détermine ensuite τ_2, \dots, τ_6 d'après les formules (2) dans l'hypothèse où k^2 est une quantité complexe et ϵ comme plus haut égal à 1 ou à -1 suivant que la seconde coordonnée de k^2 est positive ou négative, il résulte alors des équations (1, 5, 6, 7, 8) du § 6

$$(8) \quad \begin{cases} \tau_1 \pi i = \log \eta(k^2), & \tau_2 \pi i = \log \eta(1 - k^2), & \tau_3 \pi i = \log \eta\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) \\ \tau_4 \pi i = \log \eta\left(\frac{1}{k^2}\right), & \tau_5 \pi i = \log \eta\left(\frac{1}{1 - k^2}\right), & \tau_6 \pi i = \log \eta\left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right). \end{cases}$$

On a de plus

$$\log(k^2) = \log(-k^2) + \epsilon \pi i, \quad \log(1 - k^2) = \log(k^2 - 1) - \epsilon \pi i$$

et par suite

$$(9) \quad \sqrt[4]{k^2} = i^{\frac{\epsilon}{2}} \sqrt[4]{-k^2}, \quad \sqrt[4]{1 - k^2} = i^{-\frac{\epsilon}{2}} \sqrt[4]{k^2 - 1}.$$

Si donc on prend de nouveau les notations de JACOBI, et si on pose

$$(10) \quad \begin{cases} q = \eta(k^2), & q_1 = \eta(1 - k^2), & q_2 = \eta\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right), \\ q_3 = \eta\left(\frac{1}{k^2}\right), & q_4 = \eta\left(\frac{1}{1 - k^2}\right), & q_5 = \eta\left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{n}{\theta(\mathcal{O}, q)}, & x_1 = \frac{ni}{\theta(\mathcal{O}, q_1)}, & x_2 = \frac{ni}{\theta(\mathcal{O}, q_2)}, \\ x_3 = \frac{n}{\theta(\mathcal{O}, q_3)}, & x_4 = \frac{ni}{\theta(\mathcal{O}, q_4)}, & x_5 = \frac{n}{\theta(\mathcal{O}, q_5)}. \end{cases}$$

formules dans lesquelles on a

$$(12) \quad \begin{cases} q = -q_3, & q_2 = -q_1, & q_4 = -q_5, \\ x_2 = x_1, & x_4 = ex_3, & x_5 = x; \end{cases}$$

on tire alors des équations (5, 6, 7) les six systèmes particuliers de formule qui sont réunis dans le tableau suivant.

Dans les trois premières colonnes sont inscrits au-dessous de $\sin am(u, k)$, $\cos am(u, k)$, $\Delta am(u, k)$ les numérateurs, et dans la quatrième colonne le dénominateur commun des fractions au moyen desquelles ces fonctions s'expriment dans les six cas admis.

	$\sin am(u, k)$	$\cos am(u, k)$	$\Delta am(u, k)$	
1	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_1(x, q)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_2(x, q)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \theta_3(x, q)$	$/\theta(x, q)$
2	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_1(x_1, q_1)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_2(x_1, q_1)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \theta_3(x_1, q_1)$	$/\theta_2(x_1, q_1)$
3	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_1(x_2, q_2)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_3(x_2, q_2)$	$\sqrt[4]{k^2-1} \cdot \theta_2(x_2, q_2)$	$/\theta_2(x_2, q_2)$
4	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_1(x_3, q_3)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \theta_3(x_3, q_3)$	$\sqrt[4]{k^2-1} \cdot \theta_2(x_3, q_3)$	$/\theta(x_3, q_3)$
5	$\frac{1}{i\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot \theta_1(x_4, q_4)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot \theta_2(x_4, q_4)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \theta_3(x_4, q_4)$	$/\theta_3(x_4, q_4)$
6	$\frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot \theta_1(x_5, q_5)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot \theta_2(x_5, q_5)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \theta_3(x_5, q_5)$	$/\theta_3(x_5, q_5)$

Ces expressions des fonctions elliptiques subsistent encore pour des valeurs réelles de k^2 , lorsque les radicaux qui s'y trouvent sont convenablement déterminés, ce sur quoi je fais les remarques suivantes.

On a admis plus haut qu'on avait à déterminer pour une valeur réelle donnée de k^2 aussi bien les valeurs de $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{q}$, que la valeur du

radical $\sqrt[4]{1-k^2}$ dont dépend la valeur de $q = \psi(k^2)$, de manière à laisser subsister les égalités

$$\frac{\theta_2(\sigma, q)}{\theta_3(\sigma, q)} = \sqrt[4]{k^2}, \quad \frac{\theta(\sigma, q)}{\theta_3(\sigma, q)} = \sqrt[4]{1-k^2}.$$

Si à la place de k^2 on a les quantités

$$(13) \quad k_1^2 = 1 - k^2, \quad k_2^2 = \frac{k^2 - 1}{k^2}, \quad k_3^2 = \frac{1}{k^2}, \quad k_4^2 = \frac{1}{1 - k^2}, \quad k_5^2 = \frac{-k^2}{1 - k^2},$$

qu'on fixe pour $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, les valeurs de

$$\sqrt[4]{1 - k_\nu^2}, \quad \sqrt[4]{k_\nu^2}, \quad q_\nu, \quad \sqrt[4]{q_\nu},$$

de manière à avoir

$$(14) \quad \frac{\theta_2(\sigma, q_\nu)}{\theta_3(\sigma, q_\nu)} = \sqrt[4]{k_\nu^2}, \quad \frac{\theta(\sigma, q_\nu)}{\theta_3(\sigma, q_\nu)} = \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}$$

et qu'on détermine alors les valeurs que $\frac{\theta_2(\sigma, q_\nu)}{\theta_3(\sigma, q_\nu)}, \frac{\theta(\sigma, q_\nu)}{\theta_3(\sigma, q_\nu)}$ doivent avoir d'après la table de formule précédente, alors il vient

$$(15) \quad \left| \begin{array}{ll} \sqrt[4]{k_1^2} = \sqrt[4]{1 - k^2}, & \sqrt[4]{1 - k_1^2} = \sqrt[4]{k^2} \\ \sqrt[4]{k_2^2} = \sqrt[4]{\frac{k^2 - 1}{k^2}} = \frac{\sqrt[4]{k^2 - 1}}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1 - k_2^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \\ \sqrt[4]{k_3^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1 - k_3^2} = \sqrt[4]{\frac{k^2 - 1}{k^2}} = \frac{\sqrt[4]{k^2 - 1}}{\sqrt[4]{k^2}} \\ \sqrt[4]{k_4^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{1 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - k^2}}, & \sqrt[4]{1 - k_4^2} = \sqrt[4]{\frac{-k^2}{1 - k^2}} = \frac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1 - k^2}} \\ \sqrt[4]{k_5^2} = \sqrt[4]{\frac{-k^2}{1 - k^2}} = \frac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1 - k^2}}, & \sqrt[4]{1 - k_5^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{1 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - k^2}} \end{array} \right.$$

Ces égalités donnent donc les valeurs que doivent avoir, les quantités $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dans les formules (1, 2), $\sqrt[4]{k^2-1}$, $\sqrt[4]{k^2}$ dans les formules (3, 4), enfin $\sqrt[4]{-k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dans les formules (5, 6), et il n'importe en rien que k^2 soit réel ou complexe.

Si cette quantité $t = k^2$ appartient au domaine désigné plus haut (§ 6). par T_0 , alors on prendra parmi les expressions précédentes des fonctions elliptiques les formules (1) comme les plus commodes, parce que le module de q ne surpasse jamais la limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(1 \pm \frac{\pi}{24} \right)^{1-n-1}$$

et par suite que les séries θ convergent très-rapidement.

Mais si $t = k^2$ appartient au domaine T_ν , ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) alors k^2 appartient au domaine T'_0 et on se servira pour le calcul des fonctions elliptiques le plus commodément des formules de la table contenues dans la ligne horizontale de rang $\nu + 1$.

Si k^2 est réel et est situé dans le domaine T_ν , ($\nu = 0, \dots, 5$) alors les formules de rang ($\nu + 1$) et les radicaux qui s'y trouvent sont tous des quantités réelles et positives.

Il faut encore remarquer que des égalités

$$\theta_3(0, q_\nu) = \theta_3(0, q_\nu^4) + \theta_2(0, q_\nu^4), \quad \frac{\theta_2(0, q_\nu^4)}{\theta_3(0, q_\nu^4)} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}}$$

résultent les expressions suivantes de $\theta_3(0, q_\nu)$, $\theta(0, q_\nu)$, $\theta_2(0, q_\nu)$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_3(0, q_\nu) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}} \cdot \theta_3(0, q_\nu^4) = \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}} \cdot (1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \dots) \\ \theta(0, q_\nu) &= \frac{2\sqrt[4]{1 - k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}} \cdot \theta_3(0, q_\nu^4) = \frac{2\sqrt[4]{1 - k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}} \cdot (1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \dots) \\ \theta_2(0, q_\nu) &= \frac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}} \cdot \theta_3(0, q_\nu^4) = \frac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}} \cdot (1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \dots) \end{aligned} \right.$$

On obtient donc en particulier pour les quantités $\theta_3(0, q), \dots, \theta(0, q_5)$ qui se trouvent dans les équations (11)

$$(17) \quad \left| \begin{aligned} \theta_3(0, q) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}} \cdot (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots) \\ \theta_3(0, q_1) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \dots) \\ \theta(0, q_2) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_2^4 + 2q_2^{16} + \dots) \\ \theta_2(0, q_3) &= \frac{2}{\sqrt[4]{k^2 - 1} + \sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_3^4 + 2q_3^{16} + \dots) \\ \theta_2(0, q_4) &= \frac{2}{\sqrt[4]{1 - k^2} + \sqrt[4]{-k^2}} \cdot (1 + 2q_4^4 + 2q_4^{16} + \dots) \\ \theta(0, q_5) &= \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}} \cdot (1 + 2q_5^4 + 2q_5^{16} + \dots) \end{aligned} \right.$$

ZUR THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNCTIONEN

VON

C. RUNGE⁽¹⁾

in BERLIN.

Seit dem Bekanntwerden der Modulfunctionen, weiss man, dass der Gültigkeitsbereich einer analytischen Function nicht nothwendig von discreten Punkten begrenzt zu sein braucht, sondern dass auch continuïrliche Linien als Begrenzungsstücke auftreten und einen Theil der complexen Ebene von dem Gültigkeitsbereich ausschliessen können.

Hier entsteht nun die Frage, ob der Gültigkeitsbereich analytischer Functionen seiner Form nach irgend welchen Beschränkungen unterliegt oder nicht. Diese Frage bildet, so weit sie sich auf eindeutige analytische Functionen bezieht, den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung. Es wird sich ergeben, dass der Gültigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Function d. h. die Gesammtheit aller Stellen an denen sie sich regulär oder ausserwesentlich singular verhält keiner andern Beschränkung unterliegt als derjenigen, zusammenhängend zu sein. In dem ersten Theile

(¹) Die Aufgabe, welche in dem ersten Paragraphen dieser Arbeit in eleganter Weise gelöst wird, ist nicht in meiner Abhandlung *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante* (Acta mathematica 4, S. 1—79) behandelt worden. Diejenige Aufgabe dagegen, mit welcher sich der Verfasser in dem zweiten Paragraphen beschäftigt, ist in meiner Abhandlung aus mehreren verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet und gelöst worden. Da jedoch der Verfasser seine Untersuchungen vor der Veröffentlichung meiner oben citirten Abhandlung machte und auch ganz andere mit dem CAUCHY'schen Integralsatze in Zusammenhang stehende Methoden braucht, so habe ich die ganze Arbeit für geeignet gehalten hier aufgenommen zu werden.

Der Herausgeber,

wird gezeigt, dass jede eindeutige analytische Function durch eine einzige unendliche Summe von rationalen Functionen in ihrem ganzen Gültigkeitsbereiche dargestellt werden kann. In dem zweiten Theile wird gezeigt, wie man durch eine Summe von rationalen Functionen eine eindeutige analytische Function bilden kann mit vorgeschriebenem Gültigkeitsbereich, von dem nur vorausgesetzt wird, dass er zusammenhängend sei.

§ 1.

Es sei A der Gültigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$. Wir wissen von ihm, dass er zusammenhängend ist. D. h. ist x_1 ein Punkt von A so gehören auch alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung zu A , und ist x_2 ein zweiter Punkt von A , so lassen sich x_1 und x_2 durch eine continuirliche Linie verbinden, deren Punkte sämmtlich zu A gehören. Ich will ferner annehmen, dass der unendlich ferne Punkt nicht zu A gehört. Dies ist keine wesentliche Beschränkung. Denn verhielte sich $f(x)$ im Unendlichen regulär oder ausserwesentlich singular, so könnte ich an Stelle von $f(x)$ die Function $f\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)$ betrachten, die bei passender Wahl von x_0 sich im Unendlichen nicht regulär oder ausserwesentlich singular verhält. Die Entwicklung von $f\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)$ in eine Summe von rationalen Functionen ergiebt unmittelbar diejenige von $f(x)$, wenn ich statt x $\frac{1}{x - x_0}$ setze.

Unsre nächste Aufgabe wird nun sein, A in einer für die folgenden Betrachtungen zweckmässigen Form darzustellen.

Ich denke mir ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$2 \pm \frac{1 \pm i}{2} \quad (n \text{ eine ganze positive Zahl})$$

construirt und durch Parallelen zu den Seiten in 2^{4n} gleiche Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^n}$ zerlegt. Ein jedes dieser kleinen Quadrate ist von 8 anderen umgeben, wenn es nicht mit einer Seite an den Rand stösst. Die Gesamtheit derjenigen Quadrate, welche zugleich mit ihren 8 umliegenden

dem Gebiete A angehören, bezeichne ich mit A_n . Es ist möglich, dass den Werthen $n = 1, 2, 3, \dots$ anfangs gar keine solchen Quadrate entsprechen. Es muss aber einmal ein Werth von n kommen, wofür A_n eine Bedeutung hat. Ja noch mehr. Jeder Punkt x von A wird sobald n einen gewissen Werth übersteigt im Innern von A_n liegen. Construire wir nämlich um x das Quadrat mit den Eckpunkten $x + \varepsilon(\pm 1 \pm i)$, so wird auch dieses zu A gehören, vorausgesetzt, dass ε hinreichend klein gewählt wird. Für einen hinreichend grossen Werth von n fällt es in das Innere des Quadrates $2^n \cdot \frac{\pm 1 \pm i}{2}$ und wenn nun zugleich $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, so gehört x zu A_n .

Sobald n gross genug ist, dass A_n ein wirklicher Bereich ist, so ist er in dem folgenden Bereich A_{n+1} vollständig enthalten. Betrachten wir nämlich eines der Quadrate von A_n . Nach der Definition von A_n gehören auch die acht umliegenden zu A . Jedes derselben zerfällt beim nächsten Schritt in 4 kleinere Quadrate. Von diesen gehören jedenfalls diejenigen zu A_{n+1} , welche an das Quadrat von A_n stossen. Folglich ist das letztere ganz in A_{n+1} enthalten.

Nach diesen Vorbereitungen schreite ich zur Darstellung von $f(x)$. Ich werde eine rationale Function $P_n(x)$ bilden, welche in A_n um weniger als $\frac{1}{n}$ (dem absoluten Betrage nach) von $f(x)$ verschieden ist. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

oder

$$P_1(x) + \sum_n [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

die gesuchte Darstellung.

Im Innern und auf der Grenze von A_n (ich will hierfür im Folgenden kurz »auf« A_n sagen, während »in« A_n im Innern von A_n bedeuten soll) liegen keine wesentlich singulären Stellen von $f(x)$. Also giebt es eine rationale Function $p(x)$, welche nur auf A_n und dort grade so wie $f(x)$ unendlich wird, so dass $\tilde{f}(x) = f(x) - p(x)$ sich auf A_n regulär verhält. Ich kann daher $\tilde{f}(x)$ durch das CAUCHY'sche Integral darstellen

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{f}(z) dz}{z - x},$$

welches im richtigen Sinne über die Begrenzungen von A_n zu erstrecken ist. A_n kann nämlich aus mehreren getrennten Theilen bestehen und die einzelnen Theile können mehrfach zusammenhängend sein. Das Integral ist für alle Werthe von x in A_n gleich $f(x)$ dagegen für alle Werthe von x ausserhalb A_n gleich Null, wie von HERMITE in seinen Vorlesungen zuerst bemerkt worden ist. Ich zerlege es entsprechend den verschiedenen Begrenzungscurven von A_n und betrachte einen dieser Theile

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{f}(z) dz}{z - x}$$

erstreckt über eine Begrenzungscurve C_n^a von A_n .

Nach der Definition eines complexen Integrals ist dies gleich

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu} \frac{\bar{f}(z_{\mu, \lambda})}{z_{\mu, \lambda} - x} (z_{\mu, \lambda} - z_{\mu-1, \lambda}), \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots, \lambda \\ z_{0, \lambda} = z_{\lambda, \lambda} \end{array} \right)$$

wo $z_{1, \lambda}, z_{2, \lambda}, \dots, z_{\lambda, \lambda}$ Systeme von λ Werthen auf der Curve C_n^a sind, deren Entfernungen

$$|z_{\lambda, \lambda} - z_{1, \lambda}|, |z_{1, \lambda} - z_{2, \lambda}|, \dots, |z_{\lambda-1, \lambda} - z_{\lambda, \lambda}|$$

mit wachsendem λ beliebig klein werden.

Die Summe

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu} \frac{\bar{f}(z_{\mu, \lambda})}{z_{\mu, \lambda} - x} (z_{\mu, \lambda} - z_{\mu-1, \lambda}) \quad (\mu = 1, 2, \dots, \lambda)$$

ist eine rationale Function von x mit den Unendlichkeitsstellen $z_{\mu, \lambda}$, ($\mu = 1, 2, \dots, \lambda$). Ich bezeichne sie mit $R_{\lambda}^{(na)}(x)$. Das Integral ist alsdann

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_{\lambda}^{(na)}(x).$$

Ich behaupte, dieser Ausdruck ist in der Nähe jedes Punktes innerhalb und ausserhalb A_n gleichmässig convergent.

Es ist nämlich

$$\frac{\bar{f}(z_{\mu, \lambda})}{z_{\mu, \lambda} - x} (z_{\mu, \lambda} - z_{\mu-1, \lambda}) = \int_{z_{\mu-1, \lambda}}^{z_{\mu, \lambda}} \frac{\bar{f}(z_{\mu, \lambda})}{z_{\mu, \lambda} - x} dz.$$

Mithin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n^{(a)})} \frac{\bar{f}(z)}{z-x} dz - R_k^{(na)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu} \int_{z_{\mu-1,\lambda}}^{z_{\mu,\lambda}} \left(\frac{\bar{f}(z)}{z-x} - \frac{\bar{f}(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x} \right) dz. \quad (\mu=1,2,\dots,\nu)$$

Wenn daher für alle Werthe von z auf C_n^a zwischen $z_{\mu-1,\lambda}$ und $z_{\mu,\lambda}$ und alle Werthe von x in der Umgebung eines Punktes x_0 der absolute Betrag von

$$\frac{\bar{f}(z)}{z-x} - \frac{\bar{f}(z_{\mu,\lambda})}{z_{\mu,\lambda}-x}$$

kleiner ist als ε , so ist für alle diese Werthe von x der absolute Betrag von

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n^{(a)})} \frac{\bar{f}(z)}{z-x} dz - R_k^{(na)}(x)$$

kleiner als $\frac{\varepsilon}{2\pi i}$ multiplicirt mit der Länge der Begrenzungscurve $C_n^{(a)}$, also kleiner als eine Grösse, welche mit ε zugleich unendlich klein wird. Wählt man λ hinreichend gross, so wird z , wenn es zwischen $z_{\mu-1,\lambda}$ und $z_{\mu,\lambda}$ liegt, beliebig wenig von $z_{\mu,\lambda}$ verschieden sein. Die Frage der gleichmässigen Convergenz von

$$\lim R_k^{(na)}(x)$$

ist also zurückgeführt auf die folgende Frage. Gibt es eine Grösse h von der Art, dass, wenn z auf der Curve C_n^a sich dem absoluten Betrage nach um weniger als h ändert, die Änderung von

$$\frac{\bar{f}(z)}{z-x}$$

für alle Werthe von x in einer kleinen Umgebung von x_0 und alle Werthe von z auf C_n^a kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse sei?

x_0 soll nicht auf C_n^a liegen. Dann gilt dasselbe für alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 . Mithin ist

$$\frac{\bar{f}(z)}{z-x}$$

für alle in Betracht kommenden Werthssysteme z, x regulär. Für einen speciellen Werth von z lässt sich

$$\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x}$$

nach Potenzen von h entwickeln:

$$\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x} - \frac{\bar{f}(z)}{z-x} = h\varphi_1(z, x) + h^2\varphi_2(z, x) + \dots$$

Der Convergenzradius dieser Entwicklung hat für alle in Betracht kommenden Werthssysteme z, x eine von Null verschiedene untere Grenze. Denn in anderen Falle gäbe es unter den betrachteten Werthsystemen eines, in dessen Nähe er beliebig klein würde, was nicht der Fall ist.

Es sei ρ diese untere Grenze und $|h| \leq \rho_1 < \rho$, so ist

$$\frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x}$$

für alle diese Werthe von h und die betrachteten Werthe von z und x regulär und der absolute Betrag muss eine endliche obere Grenze g besitzen. Dann ist aber nach einem bekannten Satze

$$|\varphi_\lambda(z, x)| \leq g\rho_1^{-\lambda},$$

mithin

$$\left| \frac{\bar{f}(z+h)}{z+h-x} - \frac{\bar{f}(z)}{z-x} \right| \leq \frac{g \cdot |h|}{\rho_1 - |h|}$$

also für hinreichend kleine Werthe von $|h|$ beliebig klein, für alle betrachteten Werthe von z und x . Ich kann mithin λ so gross wählen, dass $R_\lambda^{(nu)}(x)$ für alle Werthe von x auf A_{n-1} und ausserhalb A_{n+1} beliebig wenig von

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(c''_n)} \frac{\bar{f}(z)}{z-x} dz$$

verschieden ist. Analoge Betrachtungen lassen sich in Bezug auf die andern Begrenzungscurven von A_n durchführen. Man sieht, dass sich

eine rationale Function von x herstellen lässt, welche auf A_{n-1} und ausserhalb A_{n+1} um weniger als $\frac{1}{n}$ von dem Gesamtintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(A_n)} \frac{\bar{f}(z)}{z - x} dz$$

verschieden sein wird. Diese rationale Function bezeichne ich mit $R_n(x)$. Und es ist also

$$\text{auf } A_{n-1} \quad |\bar{f}(x) - R_n(x)| < \frac{1}{n}$$

$$\text{ausserhalb } A_{n+1} \quad |R_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

$R_n(x)$ wird nur auf der Grenze von A_n unendlich. Ich will dieses Resultat in einem besonderen Satze noch einmal zusammenfassen, um mich später seiner zu bedienen.

»Ist B ein endliches aus einer endlichen Anzahl endlichfach zusammenhängender Stücke bestehendes Gebiet auf welchem eine im Ubrigen beliebige analytische Function $f(x)$ sich regulär verhält, und ist C ein von B getrenntes Gebiet, so giebt es eine rationale Function $R(x)$, welche auf B beliebig wenig von $f(x)$ und auf C beliebig wenig von Null verschieden ist.»

Von der Beschränkung, dass B endlich sein soll, kann man sich befreien. Man mache eine Transformation $x = x_0 + \frac{1}{x'}$ und wähle für x_0 einen Punkt ausserhalb B , so geht B in ein Gebiet B' über, welches ganz im Endlichen liegt. Für dieses bilde man die rationale Function $R(x')$ und transformire dann wieder zurück.

Daraus erhellt, dass ich eine rationale Function $r_n(x)$ bilden kann, welche ausserhalb A_{n+1} um weniger als $\frac{1}{n}$ von $p(x)$ und auf A_{n-1} um weniger als $\frac{1}{n}$ von Null verschieden ist. Denn $p(x)$ verhält sich ausserhalb und auf der Grenze von $A_{n+1}(x)$ regulär. Es ist also

$$\text{auf } A_{n-1} \quad |f(x) - R_n(x) - p(x) + r_n(x)| < \frac{2}{n}$$

$$\text{und ausserhalb } A_{n+1} \quad |R_n(x) + p(x) - r_n(x)| < \frac{2}{n}.$$

Diese rationale Function $R_n(x) + p(x) - r_n(x)$ werde mit $P_n(x)$ bezeichnet. Dann stellt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

oder, was dasselbe ist,

$$P_1(x) + \sum_n [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

die Function in ihrem ganzen Gültigkeitsbereiche dar.

Aber dieser Entwicklung ist der Vorwurf zu machen, dass Glieder derselben in Punkten unendlich werden, in denen die Function sich regulär verhält. Um diesem Übelstande abzuhelpen, werde ich an Stelle von $R_n(x) - r_n(x)$ eine andere rationale Function setzen, welche nur auf der Grenze von A unendlich wird, aber auf A_{n-1} und ausserhalb und auf der Grenze von A , abgesehen von beliebig kleinen mit n unendlich klein werdenden Umgebungen ihrer Unendlichkeitsstellen, beliebig genau mit $R_n(x) - r_n(x)$ übereinstimmt. Dann geht $P_n(x)$ in eine rationale Function über, welche nur an der Grenze von A und an den ausserwesentlich singulären Stellen, die auf A_n liegen, unendlich wird, und zwar hier genau so wie $f(x)$.

Um diese Umformung von $R_n(x) - r_n(x)$ herzustellen, bediene ich mich des folgenden Satzes:

Liegen x_1 und x_2 im Innern eines zusammenhängenden Gebietes und ist eine rationale Function $R(x)$ gegeben, welche nur in x_1 unendlich wird, so kann man eine andere rationale Function bilden, welche nur in x_2 unendlich wird und für alle Werthe von x ausserhalb jenes Gebietes beliebig genau mit $R(x)$ übereinstimmt.

Das geschieht auf folgende Weise. $R(x)$ hat die Form

$$R(x) = c_0 + \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{c_\lambda}{(x - x_1)^\lambda}.$$

Nun sei a_1 eine Stelle so nahe an x_1 , dass für alle Werthe von x ausserhalb des gegebenen Bereiches

$$\left| \frac{x_1 - a_1}{x - a_1} \right| < \varepsilon < 1.$$

Dann wird

$$c_a \left\{ \frac{1}{x - x_1} \left[1 - \left(\frac{x_1 - a_1}{x - a_1} \right)^{n_1} \right] \right\}^a$$

nur an der Stelle $x = a_1$ unendlich und ist bei hinreichend grossem n_1 beliebig wenig von $\frac{c_a}{(x - x_1)^a}$ verschieden, für alle Werthe von x ausserhalb des gegebenen Bereichs. Dasselbe gilt von den übrigen Gliedern von $R(x)$. Ich kann eine rationale Function herstellen, welche nur in a_1 unendlich wird und ausserhalb des gegebenen Gebietes beliebig wenig von $R(x)$ verschieden ist. So geht man weiter zu einer Stelle a_2 , für welche

$$\left| \frac{a_1 - a_2}{x - a_2} \right| < \varepsilon < 1$$

u. s. f.

Da sich immer eine Kette von Werthen a_1, a_2, \dots, a_n wählen lässt, so dass

$$\left| \frac{a_{a-1} - a_a}{x - a_a} \right| < \varepsilon < 1$$

und schliesslich

$$\left| \frac{a_n - x_2}{x' - x'_2} \right| < \varepsilon < 1,$$

ist, so erhält man auf diese Weise eine rationale Function $\bar{R}(x)$, welche nur in x_2 unendlich wird und für alle Werthe von x ausserhalb des Bereiches beliebig wenig von $R(x)$ verschieden ist. Man sieht leicht ein, dass eine solche Umformung auch dann noch möglich ist, wenn x_1 oder x_2 im Unendlichen liegen. Man braucht nur eine lineare Transformation

$$x' = x_0 + \frac{1}{x}$$

zu machen, durch welche x_1 und x_2 in zwei im Endlichen liegende Stellen übergehen, dann die Umwandlung von $R\left(\frac{1}{x' - x_0}\right)$ in $\bar{R}(x')$ auszuführen und wieder zu x zurückzutransformiren, so hat $\bar{R}\left(x_0 + \frac{1}{x}\right)$ die erforderlichen Eigenschaften.

Jede beliebige rationale Function kann als Summe von rationalen Functionen dargestellt werden, die nur an je einer Stelle unendlich werden. Indem ich den obigen Satz auf diese anwende, erhalte ich das folgende Resultat. Wenn die sämtlichen Unendlichkeitsstellen einer rationalen Function $R(x)$ in ρ von einander getrennten zusammenhängenden Gebieten liegen, so lässt sich eine rationale Function bilden, welche an je einer beliebigen Stelle im Innern dieser Gebiete und nur an diesen unendlich wird, und ausserhalb derselben beliebig genau mit $R(x)$ übereinstimmt.

Diese Methode der Umformung werde ich nun auf $R_n(x) - r_n(x)$ anwenden. Die Unendlichkeitsstellen dieser Function liegen sämtlich in A_{n+1} aber ausserhalb A_{n-1} . Ich betrachte eines der kleinen Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{n+1}}$, aus denen das Gebiet $A_{n+1} - A_{n-1}$ besteht. Von ihm aus kann ich sicherlich die Grenze von A_{n+1} erreichen, ohne A_{n-1} zu treffen. Denn die Quadrate von A_{n-1} können nicht ein Polygon an allen Seiten begrenzen, welches ganz zu A gehört; sondern jedes Polygon, welches sie an allen Seiten begrenzen, muss Quadrate enthalten, die nicht ganz zu A gehören. Denn sonst gehörte das Polygon auch zu A_{n-1} . Irgend ein Theil der Grenze von A_{n+1} gehört zu einem kleinen Quadrat von der Seite $\frac{1}{2^{n+1}}$ ausserhalb A_{n+1} , welches zwar noch zu A gehört und in dem grossen Quadrate mit der Seite 2^{n+1} liegt, von dessen 8 umgebenden aber mindestens eines nicht mehr diese beiden Forderungen erfüllt. Wenn ich daher alle die kleinen Quadrate, welche A_{n+1} von aussen begrenzen sammt ihren 8 umliegenden und das ganze Gebiet ausserhalb des Quadrates $2^{n+1} \cdot \frac{1 \pm i}{2}$ zu $A_{n+1} - A_{n-1}$ hinzunehme und das Ganze mit B_n bezeichne, so hat B_n die Eigenschaft, dass ich von jeder Stelle aus die Grenze von A erreichen kann ohne das Innere von B_n zu verlassen.

Nun kann ich eine rationale Function bilden, welche nur auf der Grenze von A unendlich wird ausserhalb und auf der Grenze von B_n aber beliebig wenig von $R_n(x) - r_n(x)$ verschieden ist. Diese wird an Stelle von $R_n(x) - r_n(x)$ in $P_n(x)$ eingeführt. Man erhält dadurch eine Function $\bar{P}_n(x)$ von der folgenden Beschaffenheit. Auf A_n wird $\bar{P}_n(x)$ grade so unendlich wie $f(x)$. Auf A_{n-1} ist

$$|f(x) - \bar{P}_n(x)| < \frac{2}{n}.$$

Ausserhalb A_{n-1} und B_n ist

$$|\bar{P}_n(x)| < \frac{2}{n}.$$

Die übrigen Unendlichkeitsstellen von $\bar{P}_n(x)$ liegen auf der Grenze von A .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}_n(x) \quad \text{oder} \quad \bar{P}_1(x) + \sum_n [\bar{P}_{n+1}(x) - \bar{P}_n(x)] \quad (n=1, \dots, \infty)$$

convergiert gleichmässig innerhalb und ausserhalb A und ist dort gleich $f(x)$ hier gleich Null. In einem ausserwesentlich singulären Punkte x_0 wird nur ein Glied der Summe unendlich. Denn ist A_{m-1} der erste Bereich in der Reihe A_1, A_2, \dots auf welchem x_0 liegt, so ist $\bar{P}_m(x)$ die erste Function in der Reihe $\bar{P}_1(x), \bar{P}_2(x), \dots$ welche in x_0 unendlich wird. Alle folgenden aber werden in x_0 in derselben Weise unendlich. Mithin ist

$$[\bar{P}_m(x) - \bar{P}_{m-1}(x)]$$

das einzige Glied der Summe, welches in x_0 unendlich wird.

Auf jedem continuirlichen Theil der Grenze von A kann man die Unendlichkeitsstellen der Functionen $\bar{P}(x)$ auf eine einzige reduciren.

Es erhellt ferner, dass diese Entwicklungen nicht auf eindeutige Functionen beschränkt sind, sondern überhaupt für einen Zweig irgend einer analytischen Function gelten, der sich in A regulär oder ausserwesentlich singulär verhält. Denn die Eigenschaft von $f(x)$, keine Fortsetzungen über die Grenze von A hinaus zuzulassen, wurde gar nicht benutzt, sondern nur diese, bei irgend welchen Fortsetzungen in A eindeutig zu sein.

§ 2.

Es sei A ein Gebiet, von dem nichts Anderes vorausgesetzt wird als dass es zusammenhängend ist und den unendlich fernen Punkt nicht in seinem Innern enthält. Dann kann ich in der angegebenen Weise die Gebiete A_n bilden. Mit Hilfe derselben werde ich nun eine Summe von rationalen Functionen bilden, welche nur auf der Grenze von A unendlich

werden, dergestalt dass die Summe in A überall gleichmässig convergirt und in der Nähe jedes Punktes der Grenze von A unstetig ist. Das liefert eine analytische Function, welche in A sich überall regulär und eindeutig verhält, über A hinaus aber nicht fortgesetzt werden kann.

Es sei $R_n(x)$ eine beliebige rationale Function, welche nur auf der Grenze von A unendlich wird. Nach dem Obigen kann ich eine rationale Function $R_{n+1}(x)$ bilden, welche auf A_{2n-1} um weniger als $\frac{1}{n^2}$ von $R_n(x)$ und ausserhalb A_{2n} um weniger als $\frac{1}{n}$ von 0 verschieden ist. Diese Function wird nur in dem Gebiete $A_{2n} - A_{2n-1}$ unendlich. Nun kann ich wie oben gezeigt ist, jeden Punkt von $A_{2n} - A_{2n-1}$ entweder mit der Grenze von A oder mit dem Rande des Quadrates $2^{2n+1} \frac{\pm 1 \pm i}{2}$ verbinden ohne A_{2n-1} zu treffen. Ich verbinde die Unendlichkeitspunkte von $R_{n+1}(x)$ durch Linien mit der Grenze von A respective mit dem Rande des Quadrates $2^{2n+1} \frac{\pm 1 \pm i}{2}$ und hülle diese Linien in Canäle ein, welche so schmal sind, dass sie keines der Quadrate mit der Seite $\frac{1}{2^{2n+1}}$ ganz enthalten.

Nun kann ich, wie oben auseinandergesetzt ist, die Unendlichkeitsstellen von $R_{n+1}(x)$ in diesen Canälen verschieben und mir eine andere Function $\bar{R}_{n+1}(x)$ bilden welche nur an der Grenze von A unendlich wird und die Eigenschaft besitzt im Innern des Quadrates $2^{2n+1} \frac{\pm 1 \pm i}{2}$ abgesehn von dem Gebiete $A_{2n} - A_{2n-1}$ und den Canälen beliebig wenig von $R_{n+1}(x)$ verschieden zu sein. Es lässt sich mithin erreichen, dass $\bar{R}_{n+1}(x)$ auf A_{2n-1} um weniger als $\frac{1}{n^2}$ von $R_n(x)$ verschieden ist und zugleich in einem Theile eines jeden der kleinen Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{2n+1}}$, welche das Gebiet $A_{2n+1} - A_{2n}$ ausmachen, um weniger als $\frac{1}{n}$ von Null abweicht. Denn keines dieser kleinen Quadrate ist ganz in den Canälen enthalten.

Auf ganz dieselbe Weise lässt sich eine rationale Function $\bar{\bar{R}}_{n+2}(x)$ bilden, welche auf $A_{2(n+1)-1}$ um weniger als $\frac{1}{(n+1)^2}$ von $\bar{R}_{n+1}(x)$ ver-

schieden ist und zugleich in einem Theile eines jeden der Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{2(n+1)+1}}$, welche das Gebiet $A_{2(n+1)+1} - A_{2(n+1)}$ ausmachen, um weniger als $\frac{1}{n+1}$ von 1 abweicht. Denn ich brauche ja nur eine Function $R_{n+2}(x)$ zu bilden, welche auf $A_{2(n+1)-1}$ von $\bar{R}_{n+1}(x) - 1$ um weniger als $\frac{1}{(n+1)^2}$ und in einem Theil jedes der kleinen Quadrate um weniger als $\frac{1}{n+1}$ von Null abweicht, so ist $\bar{R}_{n+2}(x) - R_{n+2}(x) + 1$ die gesuchte Function.

Auf diese Weise bilde ich eine Reihe von Functionen

$$\bar{R}_{n+1}(x), \bar{R}_{n+2}(x), \dots$$

welche den folgenden Bedingungen genügen. 1°. Sie werden nur auf der Grenze von A unendlich. 2°. Es ist auf $A_{2(n+m)-1}$:

$$|\bar{R}_{n+m+1}(x) - \bar{R}_{n+m}(x)| < \frac{1}{(n+m)^2}.$$

3°. In einem Theile eines jeden der kleinen Quadrate von der Seite $\frac{1}{2^{2(n+m)+1}}$, aus denen $A_{2(n+m)+1} - A_{2(n+m)}$ besteht, ist:

$$|\bar{R}_{n+m+1}(x)| < \frac{1}{(n+m)} \quad \text{wenn } m \text{ grade,}$$

$$\text{dagegen} \quad |\bar{R}_{n+m+1}(x) - 1| < \frac{1}{n+m} \quad \text{wenn } m \text{ ungrade ist.}$$

Der Ausdruck

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{R}_\lambda(x)$$

oder was dasselbe ist

$$\bar{R}_n(x) + \sum_{\lambda} [\bar{R}_{n+\lambda}(x) - \bar{R}_{n+\lambda-1}(x)] \quad (\lambda=1, 2, \dots, \infty)$$

convergiert in der Nähe jeder Stelle x_0 , welche in A liegt, gleichmässig. Denn sobald x_0 in $A_{2(n+m)-1}$ liegt, was für einen hinreichend grossen Werth von m eintritt, ist:

$$\begin{aligned} & |[\bar{R}_{n+m+1}(x) - \bar{R}_{n+m}(x)] + [\bar{R}_{n+m+2}(x) - \bar{R}_{n+m+1}(x)] + \dots \\ & \dots + [\bar{R}_{n+m+\lambda+1}(x) - \bar{R}_{n+m+\lambda}(x)] | \end{aligned}$$

oder

$$|\bar{R}_{n+m+\lambda+1}(x) - \bar{R}_{n+m}(x)|$$

kleiner als:

$$\frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n+m+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m+\lambda)^2}$$

eine Grösse, welche bekanntlich für einen hinreichend grossen Werth von m beliebig klein ist, wie gross man auch λ wählen möge.

Mithin stellt jener Ausdruck in \mathcal{A} eine analytische Function $f(x)$ dar, welche sich in \mathcal{A} regulär verhält. Ausserdem hat diese Function die Eigenschaft in einem Theil eines jeden der kleinen Quadrate des Gebietes $\mathcal{A}_{2(n+m)+1} - \mathcal{A}_{2(n+m)}$ um nicht mehr als

$$\frac{1}{n+m} + \frac{1}{(n+m+1)^2} + \frac{1}{(n+m+2)^2} + \dots$$

von 0 beziehungsweise von 1 abzuweichen je nachdem m grade oder ungrade ist.

Denn es ist daselbst

$$|\bar{R}_{n+m+1}(x)| < \frac{1}{n+m} \quad \text{respective} \quad |\bar{R}_{n+m+1}(x) - 1| < \frac{1}{n+m}.$$

Da aber auf $\mathcal{A}_{2(n+m)+1}$

$$|\bar{R}_{n+m+\lambda+1}(x) - \bar{R}_{n+m+1}(x)| < \frac{1}{(n+m+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m+\lambda)^2},$$

so folgt, dass für x auf $\mathcal{A}_{2(n+m)+1}$

$$|f(x) - \bar{R}_{n+m+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+m+1)^2} + \frac{1}{(n+m+2)^2} + \dots$$

also auch dass $f(x)$ in den kleinen Quadraten des Gebietes $\mathcal{A}_{2(n+m)+1} - \mathcal{A}_{2(n+m)}$ die genannte Eigenschaft besitzt. Nun sei a eine Stelle der Grenze von \mathcal{A} (es ist nicht ausgeschlossen, dass a der unendlich ferne Punkt sei), so kann man beweisen, dass die Function $f(x)$ in jeder Nähe von a , sowohl dem

Werth 0 als dem Werth 1 beliebig nahe kommt, dass mithin a eine wesentlich singuläre Stelle von $f(x)$ sein muss.

Um dies zu zeigen werde um a ein kleiner Kreis geschlagen (wenn $a = \infty$ ist, so werde ein grosser Kreis um den Nullpunkt geschlagen). In der auf diese Weise begrenzten Umgebung von a müssen für einen hinreichend grossen Werth von λ Punkte von A_λ liegen. Ich verbinde einen dieser Punkte durch eine grade Linie mit a . Diese Strecke muss Punkte des Gebietes $A_{\lambda+1} - A_\lambda$ enthalten, denn dieses Gebiet trennt A_λ von A , ebenso muss sie Punkte von $A_{\lambda+2} - A_{\lambda+1}$ u. s. w. enthalten. Mithin fallen für einen hinreichend grossen Werth von m Quadrate des Gebietes $A_{2(n+m)+1} - A_{2(n+m)}$ ganz in die Umgebung von a , und ebenso für alle grösseren Werthe von m . In diesen Quadraten kommt $f(x)$ den Werthen 0 und 1 beliebig nahe, sobald m hinreichend gross ist. Mithin kann sich $f(x)$ in a weder regulär noch ausserwesentlich singulär verhalten. Denn im ersten Falle wäre der Unterschied zweier Werthe von $f(x)$ in der Nähe von a beliebig klein, im zweiten Falle wären alle Werthe von $f(x)$ hinreichend nahe bei a beliebig gross. Alle möglichen Fortsetzungen von $f(x)$ bleiben mithin im Innern von A und da $f(x)$ hier eindeutig ist, so ist es überhaupt eindeutig, in A überall regulär und über A hinaus nicht fortsetzbar.

Wenn auf irgend eine Weise eine Punktmenge definirt ist, deren Häufungspunkte nicht zur definirten Punktmenge gehören, so giebt es stets eine eindeutige analytische Function, welche an diesen Punkten in vorgeschriebener Weise unendlich wird, und zugleich in dem ganzen Gebiete aller Stellen sich regulär verhält, welche sich mit jenen Punkten continuirlich verbinden lassen, ohne die Häufungspunkte zu treffen.

Ich nenne dies Gebiet sammt den definirten Punkten A' , nehme an, dass es den unendlich fernen Punkt nicht enthalte (was keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit ist), und construire mir die Gebiete A'_n auf die oben angegebene Weise. Da A'_n ganz im Innern von A' liegt, so enthält es nur eine endliche Anzahl der definirten Punkte; denn im andern Falle läge ein Häufungspunkt in A' .

Die Gesamtheit der Glieder mit negativen Exponenten, welche den Punkten ausserhalb A'_{n-1} und auf A'_n entsprechen, bezeichne ich mit $r_n(x)$. Jetzt bilde ich eine rationale Function $p_n(x)$, welche nur an der Grenze von A' d. h. in Häufungspunkten unendlich wird und welche auf A'_{n-1}

um weniger als $\frac{1}{n^2}$ von $r_n(x)$ verschieden ist. Nach den früheren Erörterungen ist dies stets möglich. Dann wird

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [r_n(x) - p_n(x)]$$

die gesuchte Function. Die Summe convergirt in A' gleichmässig, denn es ist in A'_{n-1}

$$\left| \sum_{k=n+m}^{\infty} [r_k(x) - p_k(x)] \right| < \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n+m+1)^2} + \dots$$

Dass $\varphi(x)$ an den vorgeschriebenen Punkten in der vorgeschriebenen Weise unendlich wird, eindeutig ist und an den übrigen Stellen von A' sich regulär verhält, ist nach der Bildungsweise evident.

Wenn jene Punktmenge im Innern des Gebietes A liegt, ihre Häufungspunkte jedoch auf der Grenze von A , so ist $\varphi(x) + f(x)$ eine eindeutige analytische Function, welche an den vorgeschriebenen Punkten in vorgeschriebener Weise unendlich wird, an den übrigen Punkten von A sich regulär verhält und über A hinaus nicht fortsetzbar sein kann. Denn die Häufungspunkte der Unendlichkeitsstellen sind als solche wesentlich singulär, die übrigen Stellen der Grenze von A dagegen aus dem Grunde wesentlich singulär, weil $\varphi(x)$ sich daselbst regulär, $f(x)$ aber wesentlich singulär verhält.

ZUR THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNCTIONEN

VON

C. RUNGE

in BERLIN.

In den Monatsberichten der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung vom 12. August 1880, hat Herr WEIERSTRASS gezeigt, dass eine Summe von Potenzreihen mit gemeinsamen Convergenzbereich, soweit sie gleichmässig convergent ist, eine monogene analytische Function darstellt. Es ist aber die Frage offen gelassen, ob diese gleichmässige Convergenz nothwendig ist, damit eine monogene analytische Function dargestellt werde. Im Folgenden soll an einem Beispiel einer Summe von ganzen rationalen Functionen gezeigt werden, dass die gleichmässige Convergenz eines Ausdrucks nicht nothwendig ist, sondern dass dieselbe auf irgend welchen Linien in der Ebene der complexen Zahlen aufhören kann, während der Ausdruck dennoch überall convergirt und eine monogene analytische Function darstellt.

Der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n(nx-1)}$$

convergirt für alle Werthe von x und ist gleich Null. Denn ist x von Null verschieden, so wird für einen hinreichend grossen Werth von n $|nx-1|$ beliebig gross. Ist aber x gleich Null, so haben wir

$$\lim_{n=\infty} \left(-\frac{1}{n} \right)$$

und das ist ebenfalls gleich Null.

Um den Punkt $\frac{1}{n}$ beschreibe man nun einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{n^2}$ und schneide denjenigen Streifen aus der Ebene der complexen Zahlen heraus, welcher von diesem Kreise beschrieben wird, wenn man seinen Mittelpunkt parallel der imaginären Achse in der positiven Richtung in's Unendliche schiebt. Ferner schneide man Alles ab, was ausserhalb eines mit dem Radius n um den Mittelpunkt beschriebenen Kreises liegt. Was übrig bleibt möge mit A_n bezeichnet werden. Alsdann verhält sich

$$\frac{1}{n(nx-1)}$$

im Innern und auf der Grenze von A_n regulär. Nach dem in der vorstehenden Abhandlung pag. 238, Zeile 4—8 bewiesenen Satze lässt sich dann eine ganze Function $g_n(x)$ bilden, welche im Innern und auf der Grenze von A_n um weniger als $\frac{1}{n}$ von

$$\frac{1}{n(nx-1)}$$

verschieden ist. Folglich wird $\lim g_n(x)$ für alle endlichen Werthe von x convergiren und gleich Null sein. Denn greife ich irgend einen Werth von x heraus, so wird er für einen hinreichend grossen Werth von n im Innern von A_n liegen und von diesem Werthe von n ab wird

$$\left| g_n(x) - \frac{1}{n(nx-1)} \right| < \frac{1}{n}$$

sein. Diese Convergenz von $\lim g_n(x)$ oder, was dasselbe ist, von

$$g_1(x) + \sum_n [g_{n+1}(x) - g_n(x)] \quad (n=1, 2, \dots)$$

für alle endlichen Werthe von x , ist nicht überall eine gleichmässige. Für eine beliebig kleine Umgebung des Nullpunktes z. B. ist es unmöglich, dass $|g_n(x)|$ für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein sei. Denn für $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ein Werth, welcher auf der Grenze von A_n liegt ist

$$\frac{1}{n(nx-1)} = 1 \quad \text{und mithin} \quad |g_n(x)| > 1 - \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt zugleich, dass auf jeder geschlossenen Linie von endlicher Länge, welche den Nullpunkt einschliesst, mindestens eine Stelle liegt, wo die gleichmässige Convergenz aufhört. Es gilt nämlich der folgende allgemeine Satz: Wenn ein Ausdruck von der Form $\lim g_n(x)$ auf einer geschlossenen Curve von endlicher Länge gleichmässig convergirt, so ist er auch im Innern derselben gleichmässig convergent. Oder, was dasselbe ist, ein zusammenhängendes Gebiet der gleichmässigen Convergenz einer Summe von ganzen Functionen ist stets einfach zusammenhängend. Es sei ξ irgend ein Punkt im Innern der Curve C , so ist nach CAUCHY

$$g_{n+m}(\xi) - g_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{g_{n+m}(x) - g_n(x)}{x - \xi} dx.$$

Wird nun ξ auf ein Gebiet beschränkt dessen Entfernung von C grösser ist als r und wird n so gross gewählt, dass $|g_{n+m}(x) - g_n(x)|$ längs der Curve kleiner als eine beliebig klein angenommene Grösse ε ist, wie gross man auch m nehme, was nach der auf C vorausgesetzten gleichmässigen Convergenz möglich ist, so folgt

$$|g_{n+m}(\xi) - g_n(\xi)| < \frac{\varepsilon l}{2\pi r}$$

(wo l die Länge von C bedeutet). Mit andern Worten es findet in der Nähe jedes Punktes im Innern von C gleichmässige Convergenz statt.

Wendet man diesen Satz auf unsren Ausdruck an, so folgt, dass er nicht längs irgend einer den Nullpunkt einschliessenden Curve von endlicher Länge gleichmässig convergiren kann. Es muss auf derselben mindestens eine Stelle geben, wo der Ausdruck ungleichmässig convergirt. Diese kann nur auf dem positiven Theil der imaginären Achse liegen. Denn jeder andre Punkt fällt sammt einer hinreichend kleinen Umgebung für hinreichend grosse Werthe von n in das Innere von A_n wo

$$|g_n(x)| < \left| \frac{1}{n(n-1)} \right| + \frac{1}{n}$$

also beliebig klein ist. Nur die Punkte des positiven Theils der imaginären Achse haben die Eigenschaft, dass jede noch so kleine Umgebung derselben für einen hinreichend grossen Werth von n über die Grenze

von A_n hinausgreift. Längs des positiven Theils der imaginären Achse muss nun aber die Convergenz überall eine ungleichmässige sein, weil sich sonst eine den Nullpunkt umschliessende Curve ziehen liesse, längs deren die Convergenz gleichmässig ist.

Hätte man die Streifen, welche aus der complexen Ebene ausgeschnitten wurden, um A_n zu bilden, so gewählt, dass sie sich mit wachsendem n irgend einer andern von Null bis in's Unendliche laufenden Curve näherten, so würde auf dieser die Convergenz ungleichmässig sein. Auch lässt sich an Stelle des Nullpunktes irgend ein anderer Punkt einführen. Durch Addition solcher Ausdrücke kann man eine Summe von ganzen Functionen herstellen, welche für alle endlichen Werthe von x convergirt, deren gleichmässige Convergenz aber auf beliebig vielen von irgend welchen Punkten in's Unendliche laufenden Curven aufhört. Dennoch wird dadurch eine einzige monogene Function nämlich die Null, oder wenn man irgend eine durch eine beständig convergirende Reihe darstellbare Function hinzuaddirt, diese Function dargestellt.

ÜBER DIE BRECHUNG DES LICHTES IN CRISTALLINISCHEN MITTELN

VON

SOPHIE KOWALEVSKI

in STOCKHOLM.

In seinen *Leçons sur l'élasticité* hat LAMÉ eine Anwendung der Elasticitätstheorie auf die Erklärung der doppelten Brechung des Lichtes in dreiaxigen Crystallen gegeben. Ich werde hier in wenigen Worten das Hauptergebniss seiner Untersuchungen recapituliren. Ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen, denen alle möglichen Schwingungen in einem elastischen homogenen ⁽¹⁾ Mittel unterworfen sind, stellt er zunächst die Bedingungen fest, unter welchen eine Doppelbrechung des Lichtes überhaupt möglich ist. Unter der Voraussetzung, dass die Schwingungen der einzelnen Theilchen transversal sind, d. h. ohne eine Änderung der Dichtigkeit des schwingenden Mittels vor sich gehen, können die partiellen Differentialgleichungen, welche dieselben bestimmen, stets auf die Form

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)}{\partial z} \\
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)}{\partial x} \\
 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

⁽¹⁾ D. h. in einem solchen, in welchem die elastischen Eigenschaften in der Umgebung eines jeden Punktes dieselben sind.

gebracht werden, wobei x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des schwingenden Mittels, ξ, η, ζ die Componenten der Ver-
rückung dieses Punktes von seiner Gleichgewichtslage, t die Zeit und
 a, b, c drei positive Constanten — die Elasticitäts-Axen des betrachteten
Körpers — bedeuten.

Die Hypothese, dass die Schwingungen vor sich gehen, ohne die
Dichtigkeit des vibrirenden Mittels zu ändern, erfordert, dass die Grösse

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

identisch gleich Null sei.

Nun folgt aber aus den Gleichungen (1)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0.$$

Der aufgestellten Hypothese wird also genügt, wenn die Anfangs-
werthe von ξ, η, ζ und deren Ableitungen nach t für $t = 0$ so gewählt
sind, dass $(\theta)_{t=0} = 0$ und $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$ sind.

Der ganzen Theorie von FRESNEL liegt die Hypothese zu Grunde,
dass jedes Theilchen der Oberfläche des brechenden Mittels, welches von
einem Lichtstrahle getroffen ist, zum Mittelpunkt eines Systemes von ebenen
Wellen wird, und zwar so, dass nach jeder Richtung hin sich zwei Wellen
mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen.

Es war also zuerst zu untersuchen, ob die Gleichungen (1) sich im
Einklange mit dieser Hypothese integriren lassen.

LAMÉ macht die Annahme, dass der Schwingungsmittelpunkt eine
Reihe von Schwingungen ausführt, so dass die Componenten seiner Ver-
schiebungen durch die Formeln:

$$\xi_0 = X_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad \eta_0 = Y_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad \zeta_0 = Z_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

dargestellt werden können, wobei τ die Schwingungsdauer einer voll-
ständigen Schwingung bedeutet. Ein beliebiger Punkt des vibrirenden
Mediums wird nach zwei verschiedenen Hemmungen λ_1 und λ_2 in Schwin-

gung gerathen, und das Gesetz seiner Verschiebung wird folglich durch die Componenten

$$\xi = X_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + X_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

$$\eta = Y_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + Y_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

$$\zeta = Z_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + Z_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

dargestellt werden. Die Grössen X_1 , Y_1 , Z_1 , X_2 , Y_2 , Z_2 sind Functionen von x , y , z , welche so bestimmt werden sollen, dass die entsprechenden Werthe von ξ , η , ζ in die Gleichungen (1) eingesetzt, denselben genügen, und dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$X_1 + X_2 = X_0, \quad Y_1 + Y_2 = Y_0, \quad Z_1 + Z_2 = Z_0 \quad \text{sei.}$$

Nach der Theorie von FRESNEL ist der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche von der, aus dem Mittelpunkt ausgehenden Welle nach der Zeiteinheit getroffen werden, eine zweischalige Fläche, welche in der Geometrie unter dem Namen der Wellenfläche bekannt ist. Setzt man mit LAMÉ

$$R = x^2 + y^2 + z^2, \quad Q = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2,$$

$$P = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2, \quad q = a^2b^2c^2,$$

so ist die Gleichung derselben

$$(2) \quad q - Q + RP = 0.$$

Um die Lage der fortschreitenden Lichtwelle nach der Zeit λ zu ermitteln, braucht man nur in dieser Gleichung statt x , y , z , $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda}$, $\frac{z}{\lambda}$ zu schreiben. Man erhält dann die Gleichung

$$(2^a) \quad q\lambda^4 - Q\lambda^2 + RP = 0,$$

welche alle die successiven Lagen der fortschreitenden Welle darstellt, wenn man in derselben λ variiren lässt.

In Beziehung auf λ^2 gelöst, hat diese Gleichung die zwei Wurzeln:

$$\lambda^2 = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}.$$

Die zwei positiven Werthe von λ , λ_1 und λ_2 stellen die zwei verschiedenen Zeiten dar, nach welchen ein Punkt von der fortschreitenden Welle getroffen wird.

Da die partiellen Differentialgleichungen (1) linear sind, so genügt es die Functionen X , Y , Z zu bestimmen, unter der Annahme, dass λ irgend eine der Wurzeln der obigen Gleichung ist.

Durch eine recht beschwerliche, wenn auch sehr elegante Rechnung, gelingt es LAMÉ in der That die Functionen X , Y , Z in der erforderlichen Weise zu bestimmen.

Setzt man

$$\omega = \frac{\lambda}{\sqrt{(c^2\lambda^2 - R)(b^2\lambda^2 - R)(a^2\lambda^2 - R)}}$$

$$X = \omega \left(y \frac{\partial \lambda}{\partial z} - z \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)$$

$$Y = \omega \left(z \frac{\partial \lambda}{\partial x} - x \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)$$

$$Z = \omega \left(x \frac{\partial \lambda}{\partial y} - y \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)$$

so werden die Grössen

$$\xi = X \cos 2\pi \frac{t - \lambda}{\tau}$$

$$\eta = Y \cos 2\pi \frac{t - \lambda}{\tau}$$

$$\zeta = Z \cos 2\pi \frac{t - \lambda}{\tau}$$

Integrale der Differentialgleichungen (1), welche zugleich die Relation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

befriedigen. Selbstverständlich haben wir in diesem Falle nur ein System von particulären Integralen der partiellen Differentialgleichungen (1). Ausserdem sieht man bei näherer Untersuchung, dass dieselben eine physikalisch unmögliche Bewegung darstellen, denn in jedem Punkte einer optischen Axe stellt sich jede der Grössen X , Y , Z unter der Form $\frac{0}{0}$ dar und wird unbestimmt.

LAMÉ versucht dieses Ergebniss auf die folgende Weise zu erklären. Alle Molecüle, welche derselben Wellenfläche angehören, gerathen zu derselben Zeit in Schwingung. Ihre Verrückungen geschehen in der betreffenden Tangentialebene der Wellenfläche und senkrecht zur Richtung des Strahles. Wie man auf geometrischem Wege sofort erkennt, fallen sie also zusammen mit der Richtung der betreffenden sphärischen Curve auf der Wellenfläche. Durch jeden gewöhnlichen Punkt der Wellenfläche geht nur eine einzige sphärische Curve; aber der Endpunkt einer optischen Axe zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, gleichzeitig auf zwei sphärischen Curven zu liegen. Seine Bewegung unterscheidet sich demnach von derjenigen eines jeden anderen Punktes. Die beiden Curven umschlingen ihn also gewissermassen, wie LAMÉ sagt, durch zwei entgegengesetzte Bogen, durch zwei Halbkreise oder Halbellipsen, deren Krümmung sehr gross ist. Daraus entsteht für den betrachteten Punkt eine zusammengesetzte kreisförmige oder elliptische Bewegung. In dieser Weise meint LAMÉ die aus den Formeln sich ergebende Unbestimmtheit zu erklären und zu beseitigen. Hiergegen könnte man jedoch einwenden, dass diese Erklärung aus den Formeln selbst abgeleitet werden müsste, d. h. dass man durch Combination der Ausdrücke X_1 und X_2 , Y_1 und Y_2 , Z_1 und Z_2 die Unbestimmtheit entfernen und die wirkliche Bahn des fraglichen Punktes müsste erklären können. Dieses ist aber keineswegs der Fall.

Ausserdem giebt es noch einen Punkt im Raume, in welchem die LAMÉ'schen Formeln nicht mehr im Stande sind, die Erscheinungen zu beschreiben: In dem Coordinatenanfangspunkte, d. h. im Schwingungsmittelpunkte selbst, wird jede der Grössen X , Y , Z unendlich gross. Hier müssten also die Schwingungen unendlich gross sein und zwar nach allen Richtungen hin; (übrigens ein Resultat, zu welchem man nothwendiger Weise geführt wird, wenn man von der Hypothese eines einzigen Schwingungsmittelpunktes ausgeht).

LAMÉ versucht diesen Widerspruch seiner Theorie mit der Wirklichkeit durch die Annahme zu erklären, dass jedes materielle Theilchen des betrachteten Mittels mit einer Aethératmosphäre umgeben sei, welche durch das einfallende Licht in Schwingungen versetzt werde, die sich dann auf das materielle Theilchen übertragen.

Ich werde hier auf die Discussion dieser Hypothese nicht näher eingehen. LAMÉ selbst hat sie nur ausgesprochen, ohne auch zu versuchen sie mathematisch zu begründen. Bevor man die Möglichkeit von Schwingungen in einem cristallinischen Mittel der FRESNEL'schen Theorie entsprechend discutirt, sollte man jedenfalls die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1) aufstellen, denn dann erst werden wir alle möglichen Bewegungen kennen. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand meiner Arbeit. Ich bin durch meinen hochverehrten Lehrer WEIERSTRASS angeregt worden dieselbe zu unternehmen, in der Erwartung dass dieselbe Integrationsmethode, welche von ihm vor vielen Jahren aufgestellt und auf die Integration von einigen einfacheren linearen partiellen Differentialgleichungen angewendet wurde, auch in diesem Falle sich behähren würde.

Ich werde hier den Inhalt einer noch nicht publicirten Abhandlung mittheilen, welche mir von WEIERSTRASS im Jahre 1881 zur Verfügung gestellt, aber viel früher von ihm verfasst wurde.

»Es seien u, v, w reelle, veränderliche Grössen, die wir als die Coordinaten eines Punktes im Raume in Beziehung auf drei in einem Punkte O unter rechten Winkeln sich schneidende Axen betrachten. Ferner sei S irgend eine geschlossene Fläche von der Beschaffenheit, dass in jeder von O ausgehenden Richtung nur *ein* Punkt derselben liegt. Dann gehört zu jedem Punkte P des Raumes ein bestimmter Punkt P_1 der Fläche, nämlich derjenige, in welchem dieselbe von der Strecke OP oder deren Verlängerung über P hinaus geschnitten wird; und wenn man das Verhältniss OP zu OP_1 mit t bezeichnet, so ist t eine beständig positiv bleibende continuirliche Function der Coordinaten u, v, w von P , welche die Eigenschaft hat, dass sie in kt übergeht, wenn man u, v, w alle drei mit derselben positiven Zahl k multiplicirt. Der Ort aller Punkte ferner, für welche t denselben Werth hat, ist eine Fläche σ_t , welche S ähnlich ist und von dieser ganz umschlossen wird, wofern $t < 1$ ist, während das Umgekehrte stattfindet, wenn $t > 1$. Setzt man nun

$$u' = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad v' = \frac{\partial t}{\partial v}, \quad w' = \frac{\partial t}{\partial w},$$

so sind u' , v' , w' solche Functionen von u , v , w , die sich nicht ändern, wenn man diese Grössen alle drei mit k multiplicirt, und welche folgende geometrische Bedeutung haben. Man denke sich in dem Punkte u , v , w an der durch denselben gehenden Fläche σ , die Tangentialebene gelegt, so ist deren Gleichung, wenn man mit U , V , W die Coordinaten irgend eines ihrer Punkte bezeichnet

$$u'U + v'V + w'W = t$$

Fällt man ferner von O aus auf diese Ebene ein Loth, so ist die Länge desselben

$$\frac{t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

und die Coordinaten seines Fusspunktes

$$\frac{u't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \quad \frac{v't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \quad \frac{w't}{u'u' + v'v' + w'w'}.$$

Dieses vorausgesetzt, sei $F(u, v, w)$ eine Function von u , v , w , die sich überall stetig ändert, mit Ausnahme etwa in der Nähe des Punktes O , und es werde der Werth, den das Integral

$$\iiint F(u, v, w) du dv dw$$

erhält, wenn die Integration über alle diejenigen Punkte des Raumes ausgedehnt wird, die zwischen zweien Flächen σ_t und σ_{t_0} liegen, — wo wir jetzt t als eine unbeschränkt veränderliche positive Grösse und t_0 als einen besonderen (festen) Werth derselben betrachten — mit

$$\pm \int_{(t_0, \dots, t)} F(u, v, w) d\omega$$

bezeichnet, in welcher Formel $d\omega$ das Raumelement $du dv dw$ bedeutet und das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$t > t_0 \quad \text{oder} \quad t < t_0.$$

Dann erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung die folgenden beiden Gleichungen, in denen $d\sigma_t$ ein Element der Fläche σ_t bedeutet.

$$(A) \quad D_t \int_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w) d\omega = \int \frac{F(u, v, w) d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}.$$

$$(B) \quad D_t \int_{(t_0 \dots t)} D_u F(u, v, w) d\omega = D_t \int \frac{u' F(u, v, w) d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}. \quad (1)$$

Daraus folgt, wenn man in der ersten Formel $u'F$ für F setzt

$$(C) \quad D_t \int_{(t_0 \dots t)} D_u F(u, v, w) d\omega = D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} u' F(u, v, w) d\omega.$$

(1) Die Gleichung (A) ergibt sich folgendermassen:

Der Zuwachs von $\int_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w) d\omega$, wenn t sich um dt ändert, ist gleich

$$\int_{(t, \dots, t+dt)} F(u, v, w) d\omega.$$

Da der Abstand der Tangentialebenen in entsprechenden Punkten der beiden Flächen t und $t + dt$ nach dem Obigen gleich $\frac{dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$ ist, so kann das Raumelement auch die Form

$$\frac{d\sigma_t dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

erhalten. Mithin ist

$$\int_{(t, \dots, t+dt)} F(u, v, w) d\omega = \int \frac{F(u, v, w) d\sigma_t dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

oder wenn man durch dt dividirt

$$D_t \int_{(t_0 \dots t)} F(u, v, w) d\omega = \int \frac{F(u, v, w) d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}.$$

Die Gleichung (B) ergibt sich, abgesehen von der Differentiation nach t auf beiden Seiten, durch die bekannte Verwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral; vergl. z. B. RIEMANN, *Schwere, Electricität und Magnetismus*, § 19.

Nun sei $\varphi(u, v, w)$ eine Function, welche dieselbe Beschaffenheit hat, wie sie für F angenommen ist, $f(u, v, w)$ eine andere Function die sich überall stetig ändert (auch in der Nähe des Punktes O) und

$$F(x, y, z, t) = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes bedeuten. Dann hat man:

$$\begin{aligned} D_x F &= D_t \int \varphi D_x f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &= D_t \int \varphi D_u f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &= D_t \int D_u [\varphi \cdot f(x+u, y+v, z+w)] d\omega - D_t \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w) d\omega. \end{aligned}$$

Mithin, nach (C):

$$\begin{aligned} (D) \quad D_x F &= D_t \int_{(t_0 \dots t)} u' \varphi f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &\quad - D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w) d\omega. \end{aligned}$$

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned} D_y F &= D_t \int_{(t_0 \dots t)} v' \varphi f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &\quad - D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ D_z F &= D_t \int_{(t_0 \dots t)} w' \varphi f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &\quad - D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w) d\omega. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$D_x^2 F = D_t^3 \int u' u' \varphi \cdot f(x + u, \dots) d\omega \\ - D_t^2 \int \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \varphi + 2u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x + u, \dots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} f(x + u, \dots) d\omega$$

$$D_y^2 F = D_t^3 \int v' v' \varphi \cdot f(x + u, \dots) d\omega \\ - D_t^2 \int \left(\frac{\partial v'}{\partial v} \varphi + 2v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x + u, \dots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} f(x + u, \dots) d\omega$$

$$D_z^2 F = D_t^3 \int w' w' \varphi \cdot f(x + u, \dots) d\omega \\ - D_t^2 \int \left(\frac{\partial w'}{\partial w} \varphi + 2w' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x + u, \dots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} f(x + u, \dots) d\omega$$

(E)

$$D_{yz}^2 F = D_t^3 \int v' w' \varphi \cdot f(x + u, \dots) d\omega \\ - D_t^2 \int \left(\varphi \frac{\partial v'}{\partial w} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial w} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x + u, \dots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} f(x + u, \dots) d\omega$$

$$D_{xz}^2 F = D_t^3 \int u' w' \varphi \cdot f(x + u, \dots) d\omega \\ - D_t^2 \int \left(\varphi \frac{\partial w'}{\partial u} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x + u, \dots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial u} f(x + u, \dots) d\omega$$

$$D_{xy}^2 F = D_t^3 \int u' v' \varphi \cdot f(x + u, \dots) d\omega \\ - D_t^2 \int \left(\varphi \frac{\partial u'}{\partial v} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x + u, \dots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} f(x + u, \dots) d\omega.$$

Bezeichnet man die Function von u, v, w , welche den zum unbestimmten Punkte (u, v, w) gehörigen Werth von t giebt, mit $\vartheta(u, v, w)$, so ist

$$u' = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \quad v' = \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad w' = \frac{\partial \vartheta}{\partial w}$$

also:

$$\frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\partial w'}{\partial v} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial w'}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial w} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial w}, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v}.$$

Aus den Formeln (E), die beliebig fortgesetzt werden können, folgt nun, wenn A, B, C, \dots Constanten bedeuten

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2A' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ &= D_i \int_{(t_0 \dots t)} F f(x+u, y+v, z+w) d\omega - D_i' \int_{(t_0 \dots t)} Q f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &+ D_i \int_{(t_0 \dots t)} R f(x+u, y+v, z+w) d\omega. \end{aligned}$$

Bei der Entwicklung dieser Formeln ist, ausser der in Betreff der Functionen f, φ gemachten Annahme, vorausgesetzt worden, dass die Functionen u', v', w' und deren Ableitungen, so weit dieselben in den Formeln vorkommen, in der Fläche σ sich stetig ändern. Die Formeln lassen sich jedoch auch in manchen Fällen anwenden, wo die hinsichtlich der Functionen φ, u', v', w' gemachten Annahmen in einzelnen Punkten nicht zutreffen.

Bildet man nämlich für verschiedene Functionen φ , die mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ bezeichnet werden mögen, aber für eine und dieselbe Function f die Ausdrücke

$$F_1 = D_i \int_{(t_0 \dots t)} \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$F_2 = D_i \int_{(t_0 \dots t)} \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

.

und ist T irgend ein aus partiellen Ableitungen von P_1, P_2 u. s. w. nach x, y, z linear und mit constanten Coefficienten zusammengesetzter Ausdruck, so lässt sich derselbe mittelst den aufgestellten Formeln in der Gestalt

$$\begin{aligned} T = & D_1 \int_{(t_0 \dots t)} \phi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ & + D_2 \int_{(t_0 \dots t)} \phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ & + \dots \end{aligned}$$

darstellen, wo ϕ_1, ϕ_2, \dots Ausdrücke sind, welche aus den Functionen $u', v', w', \varphi_1, \varphi_2, \dots$ und deren Ableitungen so zusammengesetzt werden, dass auch in dem Falle, wo die letzteren an einzelnen Stellen sich nicht stetig ändern, ϕ_1, ϕ_2, \dots Functionen von u, v, w sein können, welche der im Vorstehenden hinsichtlich der Function φ , gemachten Annahme entsprechen. Trifft dieses zu, so ist die angegebene Darstellung von T zulässig.⁽¹⁾

Diese Formeln sollen jetzt angewendet werden auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial z^2} + 2A' \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial y \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial z \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial x \partial y}$$

für den Fall, dass die reellen Coefficienten A, B, \dots solche Werthe haben, dass die Function

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$$

bei reellen Werthen von x, y, z stets positiv bleibt und nur dann Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden.

⁽¹⁾ Ich muss bei dieser Gelegenheit auch bemerken, dass ich in diesem Sommer, nachdem meine Arbeit schon fertig war, durch eine freundliche persönliche Mittheilung von Prof. KRONECKER erfahren habe, dass er ähnliche Transformationsformeln für dreifache Integrale, welche auf die Differentiation nach einem Parameter beruhen, von welchem die Begrenzung des Integrales abhängt, bei seinen Untersuchungen über das Potential, gebraucht hat.

Das Resultat, in Doppelintegralen verwandelt, stimmt überein mit dem von CAUCHY (Journal de l'Ecole polytechnique, Cah. 20, p. 297—309) und in dem besonderen Falle, wo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

mit dem von POISSON in einer Abhandlung in Mémoires de l'Académie des Sciences gegebenem.

Es sei in diesem Falle die Fläche σ ein Ellipsoid, und die Gleichung desselben

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1.$$

Dann ist

$$\vartheta^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv$$

und daher

$$\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = au + c'v + b'w, \quad \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = c'u + bv + a'w, \quad \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = b'u + a'v + cw,$$

welche drei lineare Functionen mit U , V , W bezeichnet werden mögen, und

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = \vartheta.$$

Daraus folgt, da

$$P = \left[(AU + C'V + B'W) \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + (C'U + BV + A'W) \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right. \\ \left. + (B'U + A'V + CW) \frac{\partial \vartheta}{\partial w} \right] \frac{\varphi}{\vartheta}$$

ist, dass man $P = \varphi$ erhält, wenn man a , b , etc. so wählt, dass die Gleichungen

$$AU + C'V + B'W = u, \quad C'U + BV + A'W = v, \quad B'U + A'V + CW = w$$

erfüllt werden. Aus denselben folgt aber, wenn man

$$G = ABC - AA'A - BB'B - CC'C + 2A'B'C'$$

setzt:

$$a = \frac{BC - A'A'}{G}, \quad b = \frac{CA - B'B'}{G}, \quad c = \frac{AB - C'C'}{G},$$

$$a' = \frac{B'C' - AA'}{G}, \quad b' = \frac{CA' - BB'}{G}, \quad c' = \frac{A'B' - CC'}{G}.$$

Nimmt man nun ferner

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta},$$

so hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\vartheta^{-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = -\vartheta^{-3} U$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\vartheta^{-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = -\vartheta^{-3} V$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = -\vartheta^{-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = -\vartheta^{-3} W$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = -a\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} = -a'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = -b\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial u} = -b'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3} \frac{\partial \vartheta}{\partial w} \frac{\partial \vartheta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} = -c\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = -c'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung der Gleichung $P = \varphi = \vartheta^{-1}$

$$R = -(Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c')\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}.$$

Aber

$$Aa + Bb + Cc = 1$$

$$A'a' + B'b' + C'c' = 1$$

und somit

$$R = 0,$$

woraus weiter auch $Q = 0$ folgt.

Wir haben also folgendes Resultat:

Setzt man

$$\vartheta(u, v, w) = \sqrt{\left(\frac{BC - A'A'}{G}u^2 + \frac{CA - B'B'}{G}v^2 + \frac{AB - C'C'}{G}w^2\right.}$$

$$\left. + 2\frac{B'C' - AA'}{G}vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G}wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G}wv\right)}$$

und

$$F = D_i \iiint_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} du dv dw,$$

wo die Integration über alle Punkte des Raumes auszudehnen ist, für welchen $\vartheta^2(u, v, w) < t^2$ ist (t_0 ist gleich 0 angenommen, was erlaubt ist, da F nicht davon abhängt und das dreifache Integral einen Sinn behält, trotzdem dass für den Punkt O $\vartheta = 0$ ist, so wird der betrachteten partiellen Differentialgleichung genügt, wenn $\vartheta = F$ genommen wird.

Nach der Form (1) ist

$$D_i \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} du dv dw = \int \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta \sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2}} d\sigma_i$$

$$= \int \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma_i,$$

wo $d\sigma_i$ ein Element der durch die Gleichung

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = t^2$$

dargestellten Fläche bedeutet. Daraus folgt weiter

$$F = \int \frac{tf(x+tu, y+tv, z+tw)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma,$$

wenn man unter $d\sigma$ ein Element der Fläche

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1$$

versteht, unter u, v, w die Coordinaten eines zugehörigen Punktes, und die Integration über die ganze Fläche ausdehnt.

Das Vorstehende gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass t positiv ist. Es ist aber, für einen positiven Werth von t

$$\iiint_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]} \frac{f(x + u, \dots) du dv dw}{\vartheta(u, v, w)} = \int_0^t \left(\int \frac{f(x + \tau u, y + \tau v, z + \tau w)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma \right) \tau d\tau.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat nun auch eine Bedeutung für negative Werthe von t , bleibt jedoch, wenn $-t$ für t gesetzt wird, unverändert, denn

$$\begin{aligned} & \int_0^{-t} \left(\int \frac{f(x + \tau u, y + \tau v, z + \tau w)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma \right) \tau d\tau \\ &= \int_0^t \left(\int \frac{f(x - \tau u, y - \tau v, z - \tau w)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma \right) \tau d\tau. \end{aligned}$$

Für jede Fläche σ aber, welche die Beschaffenheit hat, dass sie von einer durch O gehenden Geraden, in zweien, gleichweit von O abliegenden Punkten geschnitten wird, ist bei einer beliebigen Function $f(u, v, w)$

$$\int f(u, v, w) d\sigma = \int f(-u, -v, -w) d\sigma.$$

Es ist also das dreifache Integral, von dem F die Ableitung nach t ist, eine *grade* Function von t , F selbst also eine *ungrade*. Wenn aber die gegebene Differentialgleichung, unter der Voraussetzung dass φ eine *ungrade*, oder *grade* Function von t ist, für alle positiven Werthe dieser Grösse besteht, so ist sie auch für alle negativen gültig.

Für $t = 0$ wird $F = 0$, und

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, y, z) \int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Es ist aber

$$\iiint_{(y^2 < 1)} \frac{dudvdw}{\vartheta(u, v, w)} = \int_0^1 \left(\int \frac{d\sigma}{U^2 + V^2 + W^2} \right) \tau d\tau = \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Mithin, wenn man

$$\iiint_{(y^2 < 1)} \frac{dudvdw}{\vartheta(u, v, w)} = \tilde{\omega}$$

setzt, und

$$\zeta = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw,$$

so ist ζ eine Function, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt und zu gleicher Zeit für $t = 0$ die Bedingungen erfüllt:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = f(x, y, z).$$

Daraus folgt sofort, dass man die allgemeine Lösung erhält, wenn man eine zweite willkürliche Function $F(x, y, z)$ annimmt, und

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t^2 \iiint_{(y^2 < 1)} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw \\ &+ \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \iiint_{(y^2 < 1)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw \end{aligned}$$

setzt. Denn dann wird für $t = 0$

$$\zeta = F(x, y, z), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = f(x, y, z).$$

Führt man an die Stelle von u, v, w drei andere Veränderliche p, q, r ein:

$$p = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

$$q = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w$$

$$r = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w,$$

so können die Constanten α , β , etc. so bestimmt werden, dass

$$u^2 + v^2 + w^2 \quad \text{in} \quad p^2 + q^2 + r^2$$

und

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv \quad \text{in} \quad gp^2 + hq^2 + kr^2$$

übergeht, wo g , h , k positive Constanten sind. Dann hat man

$$\text{für} \quad \frac{dudvdw}{\vartheta(u, v, w)} \quad \text{zu setzen} \quad \frac{dpdqdr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}}$$

und die Integration erstreckt sich über alle Werthe von p , q , r für welche

$$gp^2 + hq^2 + kr^2 < t^2$$

ist. Diese erhält man, wenn man

$$p = \sqrt{g} \cdot \tau \cos \lambda, \quad q = \sqrt{h} \cdot \tau \sin \lambda \cos \mu, \quad r = \sqrt{k} \cdot \tau \sin \lambda \sin \mu$$

setzt, und

τ alle Werthe von 0 bis t

λ alle Werthe von 0 bis π

μ alle Werthe von 0 bis 2π

beilegt. Dann muss

$$\frac{dpdqdr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}} \quad \text{ersetzt werden durch} \quad \frac{\tau^2 \sin \lambda d\tau d\lambda d\mu}{\sqrt{ghk}},$$

wobei zu bemerken, dass $ghk = \frac{1}{G}$ ist. Darnach hat man, wenn $X(u, v, w)$ eine beliebige Function von u , v , w ist,

$$\iiint_{(\vartheta^2 < t^2)} \frac{X(u, v, w) du dv dw}{\vartheta(u, v, w)} = \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{G} \cdot X(\tau u_1, \tau v_1, \tau w_1) \tau^2 \sin \lambda d\mu d\lambda d\tau,$$

wo

$$u_1 = \alpha \sqrt{g} \cos \lambda + \beta \sqrt{h} \sin \lambda \cos \mu + \gamma \sqrt{k} \sin \lambda \sin \mu$$

$$v_1 = \alpha' \sqrt{g} \cos \lambda + \beta' \sqrt{h} \sin \lambda \cos \mu + \gamma' \sqrt{k} \sin \lambda \sin \mu$$

$$w_1 = \alpha'' \sqrt{g} \cos \lambda + \beta'' \sqrt{h} \sin \lambda \cos \mu + \gamma'' \sqrt{k} \sin \lambda \sin \mu.$$

Setzt man $X(u, v, w) = 1$, so kommt

$$\bar{\omega} = \sqrt{G} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \tau^2 \sin \lambda d\tau d\lambda d\mu = 2\pi \sqrt{G}.$$

Wir haben also das Resultat:

Es seien $F(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ zwei willkürlich angenommene Functionen von x, y, z

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

$$\vartheta(u, v, w) = \sqrt{\left(\frac{BC - A'A'}{G} u^2 + \frac{CA - B'B'}{G} v^2 + \frac{AB - C'C'}{G} w^2 \right.}$$

$$\left. + 2 \frac{B'C' - A'A'}{G} vw + 2 \frac{C'A' - B'B'}{G} wu + 2 \frac{A'B - C'C}{G} uv \right)}$$

$$F(x, y, z, t) = \iiint_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} du dv dw$$

$$f(x, y, z, t) = \iiint_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} du dv dw.$$

Dann ist

$$\phi = \frac{1}{4\pi \sqrt{G}} \left(\frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \right)$$

eine Function von x, y, z, t , welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2A' \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

genügt und zugleich so beschaffen ist, dass für $t = 0$

$$\psi = F(x, y, z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = f(x, y, z)$$

wird.

Dabei müssen aber

$$A, AB - C'C, G$$

alle drei positiv sein.

Hat man namentlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

so ist $\sqrt{G} = a^3$

$$\vartheta(u, v, w) = \frac{1}{a^3} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}} F(x, y, z, t) = \iiint_{(u^2 + v^2 + w^2 < a^2 t^2)} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{a^2 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} du dv dw$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}} f(x, y, z, t) = \iiint_{(u^2 + v^2 + w^2 < a^2 t^2)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{a^2 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} du dv dw.$$

Hat die Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

so ist $\sqrt{G} = abc$

$$\vartheta^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2},$$

also

$$4abc\pi\psi = \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$F(x, y, z, t) = \iiint \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}\right)}} du dv dw$$

$$f(x, y, z, t) = \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}\right)}} du dv dw$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} < t^2\right).$$

Die Integration des folgenden Systemes partieller Differentialgleichungen (in denen a, b positive Constanten, t, x, y, z unbeschränkt Veränderliche reelle Grössen und ξ, η, ζ zu bestimmende Functionen derselben bedeuten):

$$\begin{aligned} & [D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\xi - (b^2 - a^2)D_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ (F) \quad & [D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\eta - (b^2 - a^2)D_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ & [D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\zeta - (b^2 - a^2)D_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \end{aligned}$$

lässt sich zurückführen auf die Integration der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)f = 0.$$

Zunächst ergibt sich aus den Regeln, nach denen man die Integration eines solchen Systems partieller Differentialgleichungen auf die einer einzigen mit einer unbekannten Function reducirt, dass man setzen kann:

$$\begin{aligned} \xi &= [D_t^2 - b^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varphi_1 + (b^2 - a^2)D_x(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ (G) \quad \eta &= [D_t^2 - b^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varphi_2 + (b^2 - a^2)D_y(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \zeta &= [D_t^2 - b^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varphi_3 + (b^2 - a^2)D_z(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \end{aligned}$$

in denen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Functionen von t, x, y, z bedeuten, von denen jede die folgende Differentialgleichung befriedigt, in der zur Abkürzung

$$\Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

gesetzt ist

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)(D_t^2 - b^2 \Delta)\varphi = 0.$$

Nun bedeute $f(t, x, y, z)$ oder kürzer $f(t)$ eine Function von t, x, y, z , welche der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)f(t) = 0$$

genügt, und in Beziehung auf t *ungrade* ist. Ferner sei $\phi(t, x, y, z)$ oder $\phi(t)$ eine in Beziehung auf t ebenfalls *ungrade* Function, welche die Gleichung

$$D_t^2 \phi(t) = f(t)$$

befriedigt.

Dann hat man

$$(D_t^2 - \Delta)D_t^2 \phi(t) = 0$$

oder

$$D_t^2 [(D_t^2 - \Delta)\phi(t)] = 0$$

woraus, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $(D_t^2 - \Delta)\phi(t)$ eine *ungrade* Function von t ist,

$$(D_t^2 - \Delta)\phi(t) = \phi_0 \cdot t$$

folgt, wo ϕ_0 bloss von x, y, z abhängt.

Setzt man in dieser Gleichung at für t , so ergibt sich

$$\frac{1}{a^2} D_t^2 \phi(at) - \Delta \phi(at) = \phi_0 \cdot at,$$

oder

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)\phi(at) = a^2 t \cdot \phi_0$$

und ebenso

$$(D_t^2 - b^2 \Delta) \phi(bt) = b^2 t \cdot \phi_0.$$

Daher

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)(D_t^2 - b^2 \Delta) \phi(at) = -a^2 b^3 \cdot t \cdot \Delta \phi_0$$

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)(D_t^2 - b^2 \Delta) \phi(bt) = -a^3 b t \cdot \Delta \phi_0$$

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)(D_t^2 - b^2 \Delta) \left(\frac{1}{a} \phi(at) - \frac{1}{b} \phi(bt) \right) = 0.$$

Setzt man daher

$$\varphi = \frac{\frac{1}{a} \phi(at) - \frac{1}{b} \phi(bt)}{a^2 - b^2},$$

so ergibt sich

$$(H) \quad (D_t^2 - a^2 \Delta)(D_t^2 - b^2 \Delta) \varphi = 0$$

und zugleich hat man für $t = 0$

$$\varphi = 0, \quad D_t \varphi = 0, \quad D_t^2 \varphi = 0, \quad D_t^3 \varphi = \left(\frac{a^3 \phi'''(at) - b^3 \phi'''(bt)}{a^2 - b^2} \right)_{t=0} = \phi'''(0) = f'(0),$$

so dass, wenn man $f(t, x, y, z)$ so bestimmt, dass für $t = 0$

$$(I) \quad D_t f(t, x, y, z) = F(x, y, z)$$

wird, φ dasjenige Integral der Gleichung (H) ist, welches für $t = 0$ der Bedingung genügt

$$\varphi = 0, \quad D_t \varphi = 0, \quad D_t^2 \varphi = 0, \quad D_t^3 \varphi = F(x, y, z).$$

Dabei ist φ eine ungrade Function von t .

Bestimmt man nun 3 solche Functionen $f_1(t, x, y, z)$, $f_2(t, x, y, z)$, $f_3(t, x, y, z)$, welche für f gesetzt der Gleichung (I) genügen und bezeichnet mit φ_1 , φ_2 , φ_3 die Functionen, welche aus diesen so abgeleitet sind, wie hier φ aus f , und substituirt diese in die Gleichungen (G), so erhält man für ξ , η , ζ Ausdrücke, welche den Gleichungen (F) genügen, und zwar so, dass für $t = 0$

$$\begin{aligned}\xi &= 0, & D_t \xi &= f'_1(0, x, y, z), \\ \eta &= 0, & D_t \eta &= f'_2(0, x, y, z), \\ \zeta &= 0, & D_t \zeta &= f'_3(0, x, y, z).\end{aligned}$$

Dabei ist zu bemerken, dass weil

$$\Delta \phi(at) = \frac{1}{a^2} D_t^2 \phi(at) - a \phi_0 \cdot t = f(at) - a \phi_0 \cdot t$$

ist, man

$$\begin{aligned}b^2 \Delta \phi(at) &= b^2 f(at) - ab^2 \phi_0 \cdot t \\ (D_t^2 - b^2 \Delta) \phi(at) &= ab^2 \phi_0 \cdot t + (a^2 - b^2) f(at)\end{aligned}$$

hat, und daher

$$\begin{aligned}(D_t^2 - b^2 \Delta) \varphi &= (D_t^2 - b^2 \Delta) \left[\frac{1}{a} \phi(at) - \frac{1}{b} \phi(bt) \right] \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \frac{f(at)}{a} + b^2 \phi_0 \cdot t - b^2 \phi_0 \cdot t}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a} f(at).\end{aligned}$$

Mithin kann man die Gleichungen (G) auch schreiben

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{a} f_1(at) - D_x \left[D_x \left[\frac{1}{a} \phi_1(at) - \frac{1}{b} \phi_1(bt) \right] + D_y \left[\frac{1}{a} \phi_2(at) - \frac{1}{b} \phi_2(bt) \right] \right. \\ &\quad \left. + D_z \left[\frac{1}{a} \phi_3(at) - \frac{1}{b} \phi_3(bt) \right] \right] \\ \eta &= \frac{1}{a} f_2(at) - D_x \left[D_x \left[\frac{1}{a} \phi_1(at) - \frac{1}{b} \phi_1(bt) \right] + D_y \left[\frac{1}{a} \phi_2(at) - \frac{1}{b} \phi_2(bt) \right] \right. \\ &\quad \left. + D_z \left[\frac{1}{a} \phi_3(at) - \frac{1}{b} \phi_3(bt) \right] \right] \\ \zeta &= \frac{1}{a} f_3(at) - D_x \left[D_x \left[\frac{1}{a} \phi_1(at) - \frac{1}{b} \phi_1(bt) \right] + D_y \left[\frac{1}{a} \phi_2(at) - \frac{1}{b} \phi_2(bt) \right] \right. \\ &\quad \left. + D_z \left[\frac{1}{a} \phi_3(at) - \frac{1}{b} \phi_3(bt) \right] \right].\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\phi_1(t) = \int_0^t (t - \tau) f_1(\tau) d\tau + \phi_0^{(1)} \cdot t$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t (t - \tau) f_2(\tau) d\tau + \phi_0^{(2)} \cdot t$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t (t - \tau) f_3(\tau) d\tau + \phi_0^{(3)} \cdot t$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \phi_1(at) - \frac{1}{b} \phi_1(bt) &= \int_0^{at} \left(t - \frac{\tau}{a}\right) f_1(\tau) d\tau - \int_0^{bt} \left(t - \frac{\tau}{b}\right) f_1(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (t - \tau) [af_1(at) - bf_1(bt)] d\tau \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Zur Integration der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)(D_t^2 - b^2 \Delta)\varphi = 0$$

kann man auch folgendermassen gelangen.

Es sei

$$\varphi(t, a)$$

eine Function von t , welche der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2 \Delta)\varphi(t, a) = 0$$

genügt, und den Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t, a) = 0, \quad D_t \varphi(t, a) = G(x, y, z),$$

wo G eine willkürliche Function von x, y, z ist.

Ebenso sei $\varphi(t, b)$ definiert durch die Gleichung

$$(D_t^2 - b^2 \Delta)\varphi(t, b) = 0$$

und die Bedingung, dass für $t = 0$

$$\varphi(t, b) = 0, \quad D_t \varphi(t, b) = G(x, y, z).$$

Dann sind $\varphi(t, a)$, $\varphi(t, b)$ beide ungrade Functionen von t . Wenn wir

$$\varphi(t) = \varphi(t, b) - \varphi(t, a)$$

setzen, so genügt $\varphi(t)$ der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2 \Delta) D_t^2 - b^2 \Delta) \varphi = 0,$$

und man hat für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \quad D_t \varphi(t) = 0, \quad D_t^2 \varphi(t) = 0, \quad D_t^3 \varphi(t) = D_t^3 \varphi(t, a) - D_t^3 \varphi(t, b).$$

Aber

$$D_t^3 \varphi(t, a) = a^2 \Delta D_t \varphi(t, a)$$

und daher

$$[D_t^3 \varphi(t, a)]_{t=0} = a^2 \Delta G$$

und ebenso

$$[D_t^3 \varphi(t, b)]_{t=0} = b^2 \Delta G$$

also

$$[D_t^3 \varphi(t)]_{t=0} = (b^2 - a^2) \Delta G.$$

Bestimmt man daher G so, dass

$$(b^2 - a^2) \Delta G = f(x, y, z),$$

so ist $\varphi(t)$ diejenige, der betrachteten Gleichung genügende Function, welche die Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \quad D_t \varphi(t) = 0, \quad D_t^2 \varphi(t) = 0, \quad D_t^3 \varphi(t) = f$$

sein soll, erfüllt.

Nun aber hat man, wenn

$$D_t^2 \varphi(t, a) = \varphi''(t, a), \quad D_t^2 \varphi(t, b) = \varphi''(t, b)$$

gesetzt wird, auch

$$(D_t^2 - a^2 \Delta) \varphi''(t, a) = 0, \quad (D_t^2 - b^2 \Delta) \varphi''(t, b) = 0$$

und für $t = 0$

$$\varphi''(t, a) = 0, \quad D_t \varphi''(t, a) = a^2 \Delta G = \frac{a^2}{b^2 - a^2} f$$

$$\varphi''(t, b) = 0, \quad D_t \varphi''(t, b) = b^2 \Delta G = \frac{b^2}{b^2 - a^2} f.$$

Es ist also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} \varphi''(t, a)$$

diejenige der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2 \Delta) F = 0$$

genügende Function, die die Bedingung erfüllt, dass für $t = 0$

$$F = 0, \quad D_t F = f$$

sei. Also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} \varphi''(t, a) = \frac{1}{a} f(at)$$

und ebenso

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} \varphi''(t, b) = \frac{1}{b} f(bt).$$

Daraus folgt

$$\varphi(t, a) = \frac{a}{b^2 - a^2} \int_0^t \int_0^t f(at) dt dt + tG$$

$$\varphi(t, b) = \frac{b}{b^2 - a^2} \int_0^t \int_0^t f(bt) dt dt + tG.$$

Ist nun $\phi(t)$ eine Function von t deren zweite Ableitung $f(t)$ ist und die für $t = 0$ verschwindet, so hat man,

$$D_t^2 \phi(at) = a^2 f(at)$$

$$a \int_0^t \int_0^t f(at) dt dt = \frac{1}{a} \phi(at) - t \phi'(0),$$

wo

$$\phi'(0) = [D_t \phi(t)]_{t=0}.$$

Also

$$\varphi(t, a) = \frac{1}{a(b^2 - a^2)} \psi(at) + t \left[G - \frac{1}{b^2 - a^2} \psi'(0) \right]$$

und

$$\varphi(t) = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[\frac{1}{b} \psi(bt) - \frac{1}{a} \psi(at) \right].$$

Die vorstehenden Formeln geben die allgemeinen Integrale der Gleichungen (1) für den Fall dass ξ, η, ζ für $t=0$ verschwinden, also jedenfalls auch, wenn ξ, η, ζ ungrade Functionen von t sein sollen. Nimmt man nun drei Ausdrücke von derselben Form, in denen aber f_1, f_2, f_3 durch drei andere Functionen vertreten sind, bildet von diesen die Ableitungen nach t und fügt diese bezüglich zu ξ, η, ζ hinzu, so hat man die allgemeinen Ausdrücke dieser Grössen.

Es ergibt sich also folgendes Resultat: Man bestimme 6 Functionen

$$\begin{array}{lll} f_1(t, x, y, z), & f_2(t, x, y, z), & f_3(t, x, y, z), \\ F_1(t, x, y, z), & F_2(t, x, y, z), & F_3(t, x, y, z), \end{array}$$

welche für f gesetzt, der Gleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)f = 0$$

genügen, und überdies alle für $t=0$ verschwinden, ferner seien

$$\begin{array}{lll} \phi_1(t, x, y, z), & \phi_2(t, x, y, z), & \phi_3(t, x, y, z) \\ \psi_1(t, x, y, z), & \psi_2(t, x, y, z), & \psi_3(t, x, y, z) \end{array}$$

diejenigen 6 Functionen, deren zweite Ableitungen nach t beziehlich

$$\begin{array}{c} f_1, f_2, f_3 \\ F_1, F_2, F_3 \end{array}$$

sind, und welche ebenfalls für $t = 0$ sämmtlich verschwinden. Setzt man dann

$$\phi(t, x, y, z) = D_x \phi_1(t, x, y, z) + D_y \phi_2(t, x, y, z) + D_z \phi_3(t, x, y, z)$$

$$\Psi(t, x, y, z) = D_x \Psi_1(t, x, y, z) + D_y \Psi_2(t, x, y, z) + D_z \Psi_3(t, x, y, z),$$

dann sind

$$\left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{array} \right| = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{a} f_1(at) + \frac{1}{a} D_t F_1(at) + D_x \\ \frac{1}{a} f_2(at) + \frac{1}{a} D_t F_2(at) + D_y \left(\frac{1}{b} \phi(bt) - \frac{1}{a} \phi(at) + \frac{1}{b} D_t \Psi(bt) - \frac{1}{a} D_t \Psi(at) \right) \\ \frac{1}{a} f_3(at) + \frac{1}{a} D_t F_3(at) + D_z \end{array} \right|$$

die allgemeinen Integrale der Gleichungen (1).

Hieraus erhält man ferner mit einiger Änderung der Bezeichnungen die Integrale der folgenden Differentialgleichungen, in denen

$$\theta = D_x \xi + D_y \eta + D_z \zeta$$

und P, Q, R gegebene Functionen von t, x, y, z bedeuten:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta) \xi - (b^2 - a^2) D_x \theta = P(t, x, y, z)$$

$$(D_t^2 - a^2 \Delta) \eta - (b^2 - a^2) D_y \theta = Q(t, x, y, z)$$

$$(D_t^2 - a^2 \Delta) \zeta - (b^2 - a^2) D_z \theta = R(t, x, y, z).$$

Man bestimme sechs Functionen

$$F_1(t), \quad F_2(t), \quad F_3(t)$$

$$F'_1(t), \quad F'_2(t), \quad F'_3(t)$$

von t und x, y, z , welche für f gesetzt der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies für $t = 0$ sämmtlich verschwinden.

Ferner seien

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t)$$

$$\varphi'_1(t), \quad \varphi'_2(t), \quad \varphi'_3(t)$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t den obigen 6 Functionen respective gleich sind und die ebenfalls für $t = 0$ alle Null werden. Endlich seien

$$F_1''(t, \tau), \quad F_2''(t, \tau), \quad F_3''(t, \tau)$$

— wo τ eine unbestimmte Grösse bedeutet — drei Functionen, welche ebenfalls der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies so bestimmt sind, dass für $t = 0$

$$F_1'' = 0, \quad F_2'' = 0, \quad F_3'' = 0$$

$$D_t F_1'' = P(\tau, x, y, z), \quad D_t F_2'' = Q(\tau, x, y, z), \quad D_t F_3'' = R(\tau, x, y, z).$$

Bezeichnet man dann mit

$$\varphi_1''(t, \tau), \quad \varphi_2''(t, \tau), \quad \varphi_3''(t, \tau)$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t

$$F_1'', \quad F_2'', \quad F_3''$$

sind, und welche für $t = 0$ ebenfalls verschwinden und setzt:

$$\varphi(t) = D_x \varphi_1(t) + D_y \varphi_2(t) + D_z \varphi_3(t)$$

$$\varphi'(t) = D_x \varphi'_1(t) + D_y \varphi'_2(t) + D_z \varphi'_3(t)$$

so ist

$$\varphi''(t, \tau) = D_x \varphi_1''(t, \tau) + D_y \varphi_2''(t, \tau) + D_z \varphi_3''(t, \tau)$$

$$\begin{aligned} \xi = D_t \left\{ \frac{1}{a} F_1(at) + D_x \left(\frac{1}{b} \varphi(bt) - \frac{1}{a} \varphi(at) \right) \right\} + \frac{1}{a} F_1'(at) + D_x \left(\frac{1}{b} \varphi'(bt) - \frac{1}{a} \varphi'(at) \right) \\ + \int_0^t \left\{ \frac{1}{a} F_1''(at - a\tau, \tau) + D_x \left(\frac{1}{b} \varphi''(bt - b\tau, \tau) - \frac{1}{a} \varphi''(at - a\tau, \tau) \right) \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = D_t \left\{ \frac{1}{a} F_2(at) + D_y \left(\frac{1}{b} \varphi(bt) - \frac{1}{a} \varphi(at) \right) \right\} + \frac{1}{a} F_2'(at) + D_y \left(\frac{1}{b} \varphi'(bt) - \frac{1}{a} \varphi'(at) \right) \\ + \int_0^t \left\{ \frac{1}{a} F_2''(at - a\tau, \tau) + D_y \left(\frac{1}{b} \varphi''(bt - b\tau, \tau) - \frac{1}{a} \varphi''(at - a\tau, \tau) \right) \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta = D_t \left\{ \frac{1}{a} F_3(at) + D_z \left(\frac{1}{b} \varphi(bt) - \frac{1}{a} \varphi(at) \right) \right\} + \frac{1}{a} F_3'(at) + D_z \left(\frac{1}{b} \varphi'(bt) - \frac{1}{a} \varphi'(at) \right) \\ + \int_0^t \left\{ \frac{1}{a} F_3''(at - a\tau, \tau) + D_z \left(\frac{1}{b} \varphi''(bt - b\tau, \tau) - \frac{1}{a} \varphi''(at - a\tau, \tau) \right) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Um aus diesen Formeln die Ausdrücke für $D_t \xi$, $D_t \eta$, $D_t \zeta$ zu erhalten, hat man in den Formeln, welche die Functionen F'' , φ'' enthalten, unter dem Integralzeichen nach t zu differenziren.

Bezeichnet man daher die Functionen, in welche

$$D_t F_1(t), \quad D_t F_2(t), \quad D_t F_3(t); \quad D_t \varphi_1(t), \quad D_t \varphi_2(t), \quad D_t \varphi_3(t)$$

für $t = 0$ übergehen, mit

$$f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \quad f_3(x, y, z); \quad f_1'(x, y, z), \quad f_2'(x, y, z), \quad f_3'(x, y, z),$$

so hat man für $t = 0$

$$\xi = f_1(x, y, z), \quad \eta = f_2(x, y, z), \quad \zeta = f_3(x, y, z)$$

$$D_t \xi = f_1'(x, y, z), \quad D_t \eta = f_2'(x, y, z), \quad D_t \zeta = f_3'(x, y, z).$$

Dabei können bei der Bestimmung der F die f willkürlich angenommen werden.»

Um die in den vorgehenden Blättern auseinandergesetzte Methode von Herrn WEIERSTRASS in dem vorliegenden Falle anwenden zu können, setze ich

$$\begin{aligned} \xi &= D_t \int \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ (3) \quad \eta &= D_t \int \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ \zeta &= D_t \int \varphi_3(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega, \end{aligned}$$

wo die Integration auf der rechten Seite auf alle Punkte des Raumes erstreckt wird, welcher von einer gewissen geschlossenen Fläche, deren Gleichung $\theta(u, v, w) = t$ ist, begrenzt wird. Ich werde nun suchen die vier Functionen $\theta(u, v, w)$, $\varphi_1(u, v, w)$, $\varphi_2(u, v, w)$, $\varphi_3(u, v, w)$ so zu bestimmen, dass die Differentialgleichungen (1) durch diese Werthe von ξ , η , ζ befriedigt werden, indem wir $f(x+u, y+v, z+w)$ ganz beliebig lassen.

Indem ich die beiden Transformationsformeln (A) und (B) anwende, bilde ich zuerst die Ausdrücke

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Ich finde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} &= D_t^2 \int \left(\varphi_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} - \varphi_2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &\quad - D_t \int \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= D_t^2 \int \left(\varphi_2 \frac{\partial \theta}{\partial w} - \varphi_3 \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &\quad - D_t \int \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} &= D_t^2 \int \left(\varphi_3 \frac{\partial \theta}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \theta}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &\quad - D_t \int \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega. \end{aligned}$$

Die zweiten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichungen verschwinden, wenn ich setze

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} = 0.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt für

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

wo φ eine beliebige Function von u, v, w ist, welche später bestimmt werden soll.

Ich setze nun ferner

$$(5) \quad \begin{aligned} \phi_1(u, v, w) &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \phi_2(u, v, w) &= \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \phi_3(u, v, w) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{aligned}$$

$$\xi_1 = D_t^2 \int \phi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$\eta_1 = D_t^2 \int \phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$\zeta_1 = D_t^2 \int \phi_3(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega.$$

Dann ergibt sich aus den Differentialgleichungen (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - a^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial u}. \end{aligned}$$

Indem ich die Ausdrücke

$$c^2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z}, \quad a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \quad b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

in derselben Weise wie die von ξ , η , ζ mit Hülfe der WEIERSTRASS'schen Transformationsformeln umforme, finde ich:

$$c^2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y} - b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} = D_t^2 \int \left(c^2 \phi_3 \frac{\partial \theta}{\partial v} - b^2 \phi_2 \frac{\partial \theta}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$- D_t^2 \int \left(c^2 \frac{\partial \phi_3}{\partial v} - b^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = D_t^2 \int \left(a^2 \phi_1 \frac{\partial \theta}{\partial w} - c^2 \phi_3 \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$- D_t^2 \int \left(a^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial w} - c^2 \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$b^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = D_t^2 \int \left(b^2 \phi_2 \frac{\partial \theta}{\partial u} - a^2 \phi_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$- D_t^2 \int \left(b^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial u} - a^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega.$$

Die Gleichungen (1) werden, bei beliebig genommenen $f(x+u, y+v, z+w)$, befriedigt sein, wenn ich setze

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial \phi_3}{\partial v} - b^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial w} &= 0 & c^2 \phi_3 \frac{\partial \theta}{\partial v} - b^2 \phi_2 \frac{\partial \theta}{\partial w} &= \varphi_1 \\ (6) \quad a^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial w} - c^2 \frac{\partial \phi_3}{\partial u} &= 0 & (7) \quad a^2 \phi_1 \frac{\partial \theta}{\partial w} - c^2 \phi_3 \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \varphi_2 \\ b^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial u} - a^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial v} &= 0 & b^2 \phi_2 \frac{\partial \theta}{\partial u} - a^2 \phi_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \varphi_3. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (6) werden befriedigt, wenn ich setze

$$\psi_1 = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \psi_2 = \frac{1}{b^2} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \psi_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial w}.$$

Die Gleichungen (5) und (7) werden dadurch zurückgeführt auf die folgenden zwei Gruppen von Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial w} &= \frac{1}{b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial w} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial w} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial w}, \end{aligned}$$

welchen die 3 zu bestimmenden Functionen φ , ψ , θ genügen müssen. Aus diesen Gleichungen ist es leicht, eine solche abzuleiten, in welcher die Function $\theta(u, v, w)$ allein vorkommt. In der That, wenn man in die erste Gruppe der Gleichungen (8) für $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ ihre Werthe aus der zweiten Gruppe einsetzt, so findet man, wenn man zur Abkürzung $\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u}$, $\theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial v}$, $\theta_3 = \frac{\partial \theta}{\partial w}$ setzt, die folgenden drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^2} - \theta_2^2 - \theta_3^2 \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} &+ \theta_1 \theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial v} &+ \theta_1 \theta_3 \frac{\partial \psi}{\partial w} &= 0 \\ + \theta_1 \theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial u} &+ \left(\frac{1}{b^2} - \theta_3^2 - \theta_1^2 \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} &+ \theta_2 \theta_3 \frac{\partial \psi}{\partial w} &= 0 \\ + \theta_1 \theta_3 \frac{\partial \psi}{\partial u} &+ \theta_2 \theta_3 \frac{\partial \psi}{\partial v} &+ \left(\frac{1}{c^2} - \theta_1^2 - \theta_2^2 \right) \frac{\partial \psi}{\partial w} &= 0. \end{aligned}$$

Das sind lineare Gleichungen in $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \psi}{\partial w}$; damit dieselben befriedigt werden können, muss die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \theta_2^2 - \theta_3^2 & \theta_1 \theta_2 & \theta_1 \theta_3 \\ \theta_1 \theta_2 & \frac{1}{b^2} - \theta_3^2 - \theta_1^2 & \theta_2 \theta_3 \\ \theta_1 \theta_3 & \theta_2 \theta_3 & \frac{1}{c^2} - \theta_1^2 - \theta_2^2 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Wenn man dieselbe ausrechnet, und zur Abkürzung

$$H = \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2$$

$$F = b^2 c^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + c^2 a^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 + a^2 b^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2$$

$$G = (b^2 + c^2) \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + (c^2 + a^2) \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 + (a^2 + b^2) \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2$$

setzt, kommt man auf die folgende Differentialgleichung, welcher θ genügen muss:

$$(9) \quad 1 - G + HF = 0.$$

Aber ein Integral von dieser Differentialgleichung kennen wir. Bezeichnet man mit λ den Parameter einer Wellenfläche, d. h. diejenige Function von u, v, w , welche durch die Gleichung (2^a) bestimmt wird, wenn man in derselben u, v, w an Stelle von x, y, z schreibt, so wird λ der Differentialgleichung 9) genügen (siehe LAMÉ: *Leçons sur l'élasticité*, p. 301) d. h. die Integrale, welche die Werthe von ξ, η, ζ angeben, sollen auf alle Punkte des Raumes erstreckt werden, welcher durch eine Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt ist.

Dieses Resultat war übrigens leicht vorauszusehen in Folge der physikalischen Bedeutung der Wellenfläche.

In der Abhandlung von WEIERSTRASS ist von der Fläche $\theta(u, v, w) = t$ vorausgesetzt, dass sie die Eigenschaft hat, von jeder aus dem Nullpunkte ausgehenden graden Linie nur einmal getroffen zu werden. Für die Wellenfläche ist diese Bedingung offenbar nicht erfüllt, denn jede Gerade schneidet einmal die innere, einmal die äussere Schale. Deshalb ist es nothwendig die beiden Schalen von einander zu trennen, und unsere Integrale auf diejenigen Punkte des Raumes zu erstrecken, welcher von einer derselben z. B. der äusseren begrenzt wird.

Diese Trennung kann erzielt werden durch Einführung von neuen Coordinaten, welche uns das Mittel geben werden jede Schale für sich darzustellen.

Diejenigen Coordinaten, welche für unseren Zweck am geeignetsten erscheinen, sind wohl diejenigen, welche von H. WEBER (BORCHARDT's Journal, Bd. 84, p. 353 f.) eingeführt sind.

Die reellen Constanten a, b, c seien nach ihrem absoluten Betrage geordnet $a^2 > b^2 > c^2$; u_1, u_2 bedeuten zwei neue Veränderliche, und $\operatorname{sn} u_1, \operatorname{cn} u_1, \operatorname{dn} u_1$ die elliptischen Functionen von JACOBI, welche dem Modul $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$; $\overline{\operatorname{sn}} u_2, \overline{\operatorname{cn}} u_2, \overline{\operatorname{dn}} u_2$ aber diejenigen welche dem Modul $\mu^2 = \frac{a^2 b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$ entsprechen. Unter der für a^2, b^2, c^2 gemachten Voraussetzung ist sowohl k^2 wie μ^2 reell, positiv und < 1 . Setzt man dann

$$\begin{aligned} u &= \lambda b \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{dn}} u_2 \\ (10) \quad v &= \lambda a \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{cn}} u_2 \\ w &= \lambda a \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2, \end{aligned}$$

so überzeugt man sich leicht, dass der Punkt, dessen Coordinaten u, v, w sind, der Wellenfläche mit dem Parameter λ angehören wird. Setzt man ferner

$$K = \int_0^1 \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-k^2 u_1^2)}}, \quad L = \int_0^1 \frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-\mu^2 u_2^2)}},$$

so wird man die ganze äussere Schaafe dieser Wellenfläche und zwar jeden Punkt derselben nur einmal erhalten, wenn man u_1 alle reellen Werthe zwischen $-K$ und K und u_2 alle reellen Werthe zwischen $-2L$ und $+2L$ durchlaufen lässt. Ebenso, wenn man

$$K_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}}, \quad L_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\mu_1^2 u^2)}}$$

und

$$u_1 = K - iu'_1, \quad u_2 = L - iu'_2$$

setzt, so erhält man alle die Punkte der inneren Schaafe indem man u'_1 alle reellen Werthe zwischen $-K_1$ und $+K_1$ und u'_2 alle reellen Werthe zwischen $-2L_1$ und $+2L_1$ durchlaufen lässt.

Um alle diejenigen Punkte des Raumes zu erhalten, welche, sei es von der äusseren, sei es von der inneren Schale der Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt, sind, braucht man also nur in den obigen Formeln λ zwischen 0 und dem bestimmten Werthe $\lambda = t$, u_1 und u_2 aber zwischen den oben festgestellten Grenzen zu variiren.

Diese Coordinaten geben uns also das Mittel die verlangte Trennung der beiden Schalen wirklich auszuführen. Aber darin besteht ihr ganzer Nutzen noch nicht. Wir werden sehen, dass auch die Integration der beiden Gruppen der Differentialgleichungen (8. mit deren Hülfe leicht zu erreichen ist.

Zu diesem Zwecke wollen wir diese Gleichungen mit Hülfe der neuen Coordinaten transformiren. Wenn man

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, & A_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ B &= \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w}, & B_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_2}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} \\ C &= \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, & C_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \end{aligned}$$

setzt, so sind die transformirten Gleichungen

$$\begin{aligned} (11) \quad A \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + A_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, & A \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ B \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + B_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial v}, & B \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{b^2} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ C \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + C_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial w}, & C \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial w}. \end{aligned}$$

Aber die Grössen A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 genügen, wie man unmittelbar aus deren Definition sieht, den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \lambda}{\partial u} + B \frac{\partial \lambda}{\partial v} + C \frac{\partial \lambda}{\partial w} &= 0 & A_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} + C_1 \frac{\partial \lambda}{\partial w} &= 0 \\ A \frac{\partial u_1}{\partial u} + B \frac{\partial u_1}{\partial v} + C \frac{\partial u_1}{\partial w} &= 0 & A_1 \frac{\partial u_1}{\partial u} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial v} + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial w} &= \Delta \\ A \frac{\partial u_2}{\partial u} + B \frac{\partial u_2}{\partial v} + C \frac{\partial u_2}{\partial w} &= -\Delta & A_1 \frac{\partial u_2}{\partial u} + B_1 \frac{\partial u_2}{\partial v} + C_1 \frac{\partial u_2}{\partial w} &= 0, \end{aligned}$$

wenn man mit Δ die Functional-Determinante von u_1, u_2, λ in Beziehung auf u, v, w bezeichnet, also

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u}, & \frac{\partial u_1}{\partial v}, & \frac{\partial u_1}{\partial w} \\ \frac{\partial u_2}{\partial u}, & \frac{\partial u_2}{\partial v}, & \frac{\partial u_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u}, & \frac{\partial \lambda}{\partial v}, & \frac{\partial \lambda}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Da nun

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial w}$$

ist, so ist

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B \frac{\partial \varphi}{\partial v} + C \frac{\partial \varphi}{\partial w} = -\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

$$A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}.$$

Man erhält also aus den Gleichungen (11), wenn man jede derselben respective mit A, B, C , oder mit A_1, B_1, C_1 multiplicirt und addirt, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2) \frac{\partial \phi}{\partial u_1} + (AA_1 + BB_1 + CC_1) \frac{\partial \phi}{\partial u_2} &= \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \\ (AA_1 + BB_1 + CC_1) \frac{\partial \phi}{\partial u_1} + (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \frac{\partial \phi}{\partial u_2} &= -\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ (12) \quad (a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 C^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + (a^2 AA_1 + b^2 BB_1 + c^2 CC_1) \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= -\Delta \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \\ (a^2 AA_1 + b^2 BB_1 + c^2 CC_1) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + (a^2 A_1^2 + b^2 B_1^2 + c^2 C_1^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \Delta \frac{\partial \phi}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Aber wenn man die Coefficienten der Ableitungen von φ und von ψ in diesen Gleichungen, nach den bekannten Formeln für die Transformation der Coordinaten ausrechnet, so findet man, indem man die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} V &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2 \\ U_1 &= 1 - \frac{1 - k^4 - \mu^4}{1 - k^2} \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_2 + \frac{k^2(1 - k^2 - \mu^2)}{1 - k^2} \operatorname{sn}^4 u_1 \\ U_2 &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \frac{1 - k^2 - \mu^4}{1 - \mu^2} \operatorname{sn}^2 u_2 + \frac{\mu^2(1 - k^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} \operatorname{sn}^4 u_2 \end{aligned}$$

einführt:

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{a^2 b} \frac{1}{k^2 V} \\ A^2 + B^2 + C^2 &= \frac{1}{a^2 b^2} \frac{1}{k^2 V}, & a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 C^2 &= \frac{c^2}{a^2 b^2} \frac{U_2}{k^2 V^2} \\ a^2 A_1^2 + b^2 B_1^2 + c^2 C_1^2 &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{k^2 V}, & A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 &= \frac{1}{a^4} \frac{U_1}{k^2 V^2} \\ AA_1 + BB_1 + CC_1 &= a^2 AA_1 + b^2 BB_1 + c^2 CC_1 = 0. \end{aligned}$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichungen (12) einsetzt, so werden 2 derselben mit einander identisch und sie reduciren sich auf die drei folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} &= -b \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \\ (13) \quad \frac{U_1}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= \frac{a^2}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ \frac{U_2}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= \frac{c^2}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Diese letzteren können, da $U_1 U_2 - \frac{a^2}{c^2} V^2$ nicht identisch verschwindet, nur gelöst werden, wenn man setzt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{1}{b} \frac{\partial \psi}{\partial u_1}.$$

Die allgemeinen Integrale dieser letzteren sind, wenn mit l, m, n 3 willkürliche Constanten bezeichnet werden

$$\varphi = lu_2 + m$$

$$\psi = -bu_1 + n.$$

Für unseren Zweck genügt es irgend ein particuläres Integral dieser Differentialgleichungen zu kennen. Man kann also

$$l = 1, \quad m = n = 0$$

setzen.

Wenn wir diesen Werth von φ in die Ausdrücke von ξ, η, ζ einführen, erhalten wir also das folgende Resultat:

Es sei u_2 die Function von u, v, w , welche durch die Gleichungen (10) bestimmt wird; $f(x+u, y+v, z+w)$ eine willkürliche Function von $x+u, y+v, z+w$; $d\omega$ das Raum-Element; und bezeichnen wir mit

$$\int_{(1)} \varphi(u, v, w) d\omega$$

ein Integral, welches über alle Punkte desjenigen Raumes erstreckt wird, welcher durch eine sei es äussere, sei es innere Schaafe der Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt ist.

Die Ausdrücke

$$\xi = D_t \int_{(1)} \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$(14) \quad \eta = D_t \int_{(1)} \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$\zeta = D_t \int_{(1)} \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

stellen ein System von Integralen der partiellen Differentialgleichungen (1) in allen denjenigen Fällen dar, wo es erlaubt ist, die partielle Differentiation in Beziehung auf x, y, z unter dem Integralzeichen vorzunehmen.

Dieser letzte Punkt ist noch zu untersuchen.

Die 3 Functionen $\frac{\partial u_2}{\partial u}$, $\frac{\partial u_2}{\partial v}$, $\frac{\partial u_2}{\partial w}$ haben die folgende Bedeutung:

$$\frac{\partial u_2}{\partial u} = -\frac{1}{b} \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2} \overline{\operatorname{cn} u_2}}{V}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial v} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2} \overline{\operatorname{dn} u_2}}{V}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial w} = +\frac{1}{a} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn} u_2} \overline{\operatorname{dn} u_2}}{V},$$

wobei $V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \overline{\operatorname{sn}^2 u_2} - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \overline{\operatorname{sn}^2 u_2}$.

Sie haben einen bestimmten endlichen Werth für alle Werthe von u_1 und u_2 , für welche V von Null verschieden ist. Man überzeugt sich, dass für Werthe von u_1 und u_2 innerhalb der von uns bestimmten Grenzen, dieser Ausdruck nur dann verschwinden kann, wenn gleichzeitig

$$\operatorname{cn} u_1 = 0, \quad \operatorname{cn} u_2 = 0$$

ist. Die entsprechenden Werthe von u , v , w sind dann die Coordinaten eines der vier singulären Punkte der betrachteten Wellenfläche. Innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet also V für alle die Punkte einer optischen Axe; man überzeugt sich aber leicht, dass die Integrale (14) nichts desto weniger einen bestimmten endlichen Werth behalten, da, wenn man dieselben in die neuen Coordinaten λ , u_1 , u_2 transformirt, das Raumelement $d\omega$ die Gestalt erhält

$$a^2 b \lambda^2 V d\lambda du_1 du_2$$

und folglich

$$\xi = -a^2 D_t \int_0^t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \frac{1}{\lambda} \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2} \overline{\operatorname{cn} u_2} f(x+u, y+v, z+w) d\lambda du_1 du_2$$

$$\eta = -ab D_t \int_0^t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \lambda \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2} \overline{\operatorname{dn} u_2} f(x+u, y+v, z+w) d\lambda du_1 du_2$$

$$\zeta = ab D_t \int_0^t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \lambda \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn} u_2} \overline{\operatorname{dn} u_2} f(x+u, y+v, z+w) d\lambda du_1 du_2.$$

Es würde offenbar nicht gestattet sein die Ableitungen von ξ, η, ζ nach x, y, z ohne Weiteres durch Differentiation unter dem Integralzeichen aufzustellen, da die Ausdrücke, zu welchen man auf diese Weise gelangt, auch nach der Transformation in die neuen Coordinaten innerhalb der Grenzen der Integration unendlich werden. Aber nach einer Methode, welche mir von Herrn WEIERSTRASS vorgeschlagen wurde, überzeugt man sich, dass diejenigen speciellen Combinationen der Ableitungen, welche in den Differentialgleichungen (1) vorkommen, doch durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet werden können, wenn nur die willkürliche Function $f(x+u, y+v, z+w)$ den folgenden Bedingungen unterworfen wird: 1°. Sie ist in dem betrachteten Raume überall eindeutig, endlich und stetig; 2°. Sie besitzt Ableitungen nach x, y und z , welche in dem betrachteten Raume überall endlich sind.

Dies wird auf folgende Weise gezeigt.

Man denke sich um den Nullpunkt eine kleine Kugel und auf der begrenzenden Wellenfläche um jeden der 4 singulären Punkte eine kleine geschlossene Linie L beschrieben. Alsdann construïre man vier Kegel, welche den Nullpunkt zum Scheitel und je eine der vier Linien L zur Directrice haben. Mit T möge der ursprüngliche Raum bezeichnet werden und mit T' derjenige, welcher aus ihm durch Auscheidung der kleinen Kugel und der vier genannten Kegel hervorgeht. In dem Raume T' hat dann jede der Functionen $\frac{\partial u_2}{\partial u}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial w}$ nebst sämtlichen Ableitungen einen bestimmten endlichen Werth. Nun muss untersucht werden, wie die Formeln des Herrn WEIERSTRASS sich in dem Raume T' gestalten.

Die Gleichung

$$D_i \int F(u, v, w) d\omega = \int \frac{F'(u, v, w) d\sigma_i}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2}}$$

lässt sich jetzt ohne Weiteres anwenden. Die Gleichung

$$D_i \int D_u F(u, v, w) d\omega = D_i \int \frac{\frac{\partial F}{\partial u} F'(u, v, w) d\sigma_i}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2}}$$

ferner bleibt gültig, wenn wir die Integration rechts auf die ganze Begrenzung des Raumes T' erstrecken d. h.: 1° über die äussere Schale der begrenzenden Wellenfläche mit Ausnahme der vier ausgeschnittenen Linien L ; 2° über die Mantel der vier Kegel, so weit sie nicht innerhalb der kleinen Kugel liegen; 3° über die Oberfläche der Kugel, so weit sie nicht innerhalb der vier Kegel liegt. Bei jeder dieser Integrationen bezeichnet der Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial \eta}{\partial n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial w}\right)^2}}$$

den Cosinus desjenigen Winkels, welchen die nach Aussen gerichtete Normale mit der u -Axe bildet. Bezeichnet man diese Grösse mit U , so hat man also

$$\begin{aligned} \int_{(T')} D_u F(u, v, w) d\omega &= \int U F(u, v, w) d\sigma_t + \int U_0 F(u, v, w) d\sigma_0 \\ &+ \sum \int U' F(u, v, w) d\sigma', \end{aligned}$$

wo $d\sigma_0$ ein Element der Oberfläche der Kugel und $d\sigma'$ ein Element der Oberfläche eines der Kegel bedeutet. Ferner

$$D_t \int_{(T')} D_u F(u, v, w) d\omega = D_t^2 \int \frac{\partial \eta}{\partial u} F(u, v, w) d\omega + D_t \sum \int U' F(u, v, w) d\sigma'$$

(da das über die Kugel genommene Integral von t unabhängig ist).

Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes einer der ausgeschnittenen Linien auf der Fläche $\lambda = 1$, so kann man bei der letzten Integration auf der rechten Seite der obigen Gleichung

$$u' = tx_1, \quad v' = ty_1, \quad w' = tz_1$$

setzen; dann hat man

$$U' d\sigma' = t(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

und

$$D_t \int U' F(u', v', w') d\sigma' = t \int_{(L)} F(u', v', w') (y_1 dz_1 - z_1 dy_1),$$

wo die Integration über die genannte Linie erstreckt ist. Ist also

$$\bar{F}(x, y, z) = D_i \int_{(T)} \phi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z) d\omega,$$

so ist

$$D_x \bar{F}(x, y, z) = D_i \int_{(T)} \phi \frac{\partial f(u + x, v + y, w + z)}{\partial x} d\omega$$

$$- D_i \int_{(T)} D_v [\phi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z)] d\omega - D_i \int_{(T)} \frac{\partial \phi}{\partial u} f(u + x, v + y, w + z) d\omega$$

$$= D_i^2 \int_{(T)} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \phi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z) d\omega$$

$$- D_i \int_{(T)} f(u + x, v + y, w + z) \frac{\partial \phi}{\partial u} d\omega$$

$$+ i \int_{(L)} f(u + x, v + y, w + z) \phi(u, v, w) (y_1 dz_1 - z_1 dy_1).$$

Nun bilde man nach dieser Formel die Ausdrücke $D_z \eta - D_y \zeta$ u. s. w. (im Raume T^v); dann findet man

$$(15) \quad D_z \eta - D_y \zeta = D_i^2 \int_{(T)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) f(u + x, v + y, w + z) d\omega$$

$$+ i \sum_{(L)} \int f(u + x, v + y, w + z) \left[\frac{\partial u_2}{\partial v} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial w} (z_1 dx_1 - x_1 dz_1) \right].$$

Nun muss man aber bemerken, dass u_2 eine homogene Function von der 0^{ten} Dimension in u, v, w ist; $\frac{\partial u_2}{\partial u}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial w}$ sind also homogene Functionen der $(-1)^{\text{sten}}$ Dimension.

Folglich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial v} &= t^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial w} &= t^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial z_1} \\ t \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial v} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial w} (z_1 dx_1 - x_1 dz_1) \right\} \\ &= \frac{\partial u_2}{\partial y_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial z_1} (z_1 dx_1 - x_1 dz_1) \\ &= x_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1 \right) - \left(y_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial u_2}{\partial z_1} \right) dx_1.\end{aligned}$$

Aber, weil u_2 eine homogene Function der o^{ten} Dimension ist, also

$$x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = 0,$$

ist der obige Ausdruck gleich

$$x_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1 \right) = x_1 du_2.$$

Es ist also:

$$\begin{aligned}(15a) \quad D_x \eta - D_y \zeta &= D_t \int_{(\tilde{r})} \left(\frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\ &+ \sum_{(L)} \int x_1 f(u+x, v+y, w+z) du_2.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int_{(L)} x_1 f(x+u, y+v, z+w) du_2 &= \int_{(L)} d \{ x_1 f(x+u, y+v, z+w) u_2 \} \\ &- \int_{(L)} u_2 d \{ x_1 f(x+u, y+v, z+w) \}.\end{aligned}$$

Da die Linie L eine geschlossene ist, und da sowohl $x_1 f(x+u, y+v, z+w)$, wie auch $u_2 x_1 f(x+u, y+v, z+w)$ auf dem durch dieselbe begrenzten Theile der Fläche überall endlich und stetig bleiben, so ist das erste der

beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden, Integrale gleich Null. Das zweite kann aber auch, wenn die Linie L nach und nach verkleinert wird, nur einen beliebig kleinen Beitrag liefern.

Ferner ist aber

$$\frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = - \frac{b}{a^2} \frac{\partial u_1}{\partial u}$$

und der Ausdruck

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} d\omega$$

ist endlich und bestimmt in *jedem* Punkte der Wellenfläche. Die rechte Seite der Gleichung (15a) behält also einen bestimmten endlichen Werth wie klein man auch die Linie L annehmen mag. Bei dem $\lim L = 0$, wird jedes der Linien-Integrale unendlich klein, und man erhält

$$(15b) \quad \xi_1 = a^2(D_y \zeta - D_z \eta) = - \frac{1}{b} \int_{(L)} \frac{\partial u_1}{\partial u} f(u+x, v+y, w+z) d\omega.$$

Nun ist aber u_1 eine Function ganz von derselben Beschaffenheit wie u_2 ; dasselbe Raisonement kann auf diese neuen Integrale übertragen werden, und man überzeugt sich ganz in derselben Weise, dass die Ausdrücke

$$D_y \zeta_1 - D_z \eta_1 \text{ etc.}$$

dadurch gebildet werden können, dass man unter dem Integralzeichen differentiirt und dann die WEIERSTRASS'schen Transformationsformeln anwendet.

Wir sind also zu dem folgenden Resultate gekommen. Bestimmt man die 3 Grössen λ , u_1 , u_2 als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume, dadurch dass man

$$(16) \quad \begin{aligned} u &= b\lambda \operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_2, \\ v &= a\lambda \operatorname{cn} u_1 \operatorname{cn} u_2, \\ w &= a\lambda \operatorname{dn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \end{aligned}$$

setzt, so hat man

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_2}{\partial u} &= - \frac{1 - k^2 \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2} \overline{\operatorname{cn} u_2}}{b\lambda} \\
 (16a) \quad \frac{\partial u_2}{\partial v} &= - \frac{1}{a\lambda} \frac{\operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2} \overline{\operatorname{dn} u_2}}{V} \\
 \frac{\partial u_2}{\partial w} &= + \frac{1}{a\lambda} \frac{\operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn} u_2} \overline{\operatorname{dn} u_2}}{V}
 \end{aligned}$$

$$V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \overline{\operatorname{sn}^2 u_2} - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \cdot \overline{\operatorname{sn}^2 u_2}.$$

Setzt man dann, mit x, y, z drei reelle Grössen, und mit $f(x + u, y + v, z + w)$ eine den oben auseinandergesetzten Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit genügende, sonst aber beliebige Function bezeichnend,

$$\begin{aligned}
 \xi &= D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x + u, y + v, z + w) d\omega \\
 (17) \quad \eta &= D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x + u, y + v, z + w) d\omega \\
 \zeta &= D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x + u, y + v, z + w) d\omega,
 \end{aligned}$$

wobei man die Integration auf der linken Seite auf alle die Punkte des Raumes erstreckt, welcher durch die äussere, (respective durch die innere) Schale einer Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt ist, so stellen die so definirten Grössen ξ, η, ζ Functionen von x, y, z, t dar, welche für alle endlichen reellen Werthe dieser Veränderlichen einen bestimmten endlichen Werth besitzen und den partiellen Differentialgleichungen (1) genügen. Wenn man in den Gleichungen (17) das Raumelement $d\omega$ in den Coordinaten λ, u_1, u_2 ausdrückt, und für $\frac{\partial u_2}{\partial u}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial w}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (16a) einsetzt, so erhält man die Grössen ξ, η, ζ unter der folgenden Form:

$$\xi = t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \frac{1 - k^2}{b} \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \operatorname{cn} u_2 f(x + u, y + v, z + w) du_1 du_2$$

$$\eta = t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} -\frac{1}{a} \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \overline{\operatorname{dn}} u_2 f(x + u, y + v, z + w) du_1 du_2$$

$$\zeta = t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \frac{1}{a} \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}} u_2 \overline{\operatorname{dn}} u_2 f(x + u, y + v, z + w) du_1 du_2$$

in welchen Formeln man für die in $f(x + u, y + v, z + w)$ auftretenden Grössen u, v, w ihre Werthe aus den Gleichungen (16) einsetzen muss.

Nun handelt es sich darum die Anfangswerthe der so definirten Grössen ξ, η, ζ , d. h. ihre Werthe für $t = 0$ zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke werde ich diese Grössen ξ, η, ζ noch unter einer anderen Form darstellen. Es ist:

$$-\frac{1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial u} = \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w}$$

$$-\frac{1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial v} = \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

$$-\frac{1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial w} = \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

Indém wir von der Transformationsformel (B), welche man auch unter der Form

$$\begin{aligned} & D_t \int \varphi(u, v, w) \frac{\partial \lambda}{\partial u} f(x + u, y + v, z + w) d\omega \\ &= \int \varphi(u, v, w) \frac{\partial f(x + u, y + v, z + w)}{\partial x} d\omega + \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x + u, y + v, z + w) d\omega \end{aligned}$$

schreiben kann, Gebrauch machen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \xi &= D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= -b D_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} \right] d\omega \\
 \eta &= D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 (18) \quad &= -b D_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} \right] d\omega \\
 \zeta &= D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= -b D_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} \right] d\omega.
 \end{aligned}$$

Um aber auch in diesem Falle Doppel-Integrale statt dreifacher zu erhalten, wollen wir statt ξ , η , ζ die Derivirten dieser neuen Ausdrücken nach t nehmen, welche natürlich auch ein System von Lösungen bilden. Wir setzen also

$$\begin{aligned}
 \xi &= -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 (19) \quad &= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, \dots)}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, \dots)}{\partial z} \right] d\omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta &= -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, \dots)}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u, \dots)}{\partial x} \right] d\omega \\
 (19) \quad \zeta &= -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
 &= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u, \dots)}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u, \dots)}{\partial y} \right] d\omega.
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (16) ergeben sich die folgenden Werthe für

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial w}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial u} &= \frac{1}{b\lambda} \frac{\operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{dn} u_2}}{V} = \frac{V_1}{V} \\
 \frac{\partial u_1}{\partial v} &= -\frac{1}{a\lambda} \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn} u_2}}{V} = \frac{V_2}{V} \\
 \frac{\partial u_1}{\partial w} &= -\frac{1}{a\lambda} \frac{\mu^2 \operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn} u_2}}{V} = \frac{V_3}{V}.
 \end{aligned}$$

Indem man in den Integralen auf der rechten Seite der Gleichungen (19) das Raumelement $d\omega$ in den neuen Coordinaten ausdrückt, und die Integration auf alle Punkte der *äusseren* Wellenfläche ausdehnt, findet man also:

$$\begin{aligned}
 \xi &= t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \left[V_3 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} - V_2 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} \right] du_1 du_2 \\
 (20) \quad \eta &= t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \left[V_1 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} - V_3 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} \right] du_1 du_2 \\
 \zeta &= t \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} \left[V_2 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial x} - V_1 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} \right] du_1 du_2.
 \end{aligned}$$

In diesen Formeln muss man für u, v, w ihre Werthe aus den Gleichungen (16) einsetzen.

Man überzeugt sich leicht (durch ähnliche Betrachtungen wie diejenigen, welche in der Abhandlung von WEIERSTRASS vorkommen), dass die durch diese Formeln dargestellten Werthe von ξ, η, ζ *ungrade* Functionen von t sind. Um den Coefficienten von t zu erhalten, muss man in der unter dem Integralzeichen vorkommenden Function $f(x+u, y+v, z+w)$, $t=0$, folglich auch $u=0, v=0, w=0$ setzen. Bezeichnet man diesen Coefficienten in ξ, η, ζ respective mit X_0, Y_0, Z_0 , und setzt man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_3(x, y, z),$$

so hat man

$$X_0 = f_2(x, y, z) \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_3 du_1 du_2 - f_3(x, y, z) \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_2 du_1 du_2$$

$$Y_0 = f_3(x, y, z) \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_1 du_1 du_2 - f_1(x, y, z) \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_3 du_1 du_2$$

$$Z_0 = f_1(x, y, z) \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_2 du_1 du_2 - f_2(x, y, z) \int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_1 du_1 du_2.$$

Nun ist aber

$$\int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_1 du_1 du_2 = \frac{1}{b} \int_{-K}^K \operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 du_1 \int_{-2L}^{2L} \overline{\operatorname{dn}} u_2 du_2 = \frac{4\pi}{b}$$

$$\int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_2 du_1 du_2 = \int_{-K}^K \operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 du_1 \int_{-2L}^{2L} \overline{\operatorname{sn}} u_2 du_2 = 0$$

$$\int_{-K}^K \int_{-2L}^{2L} V_3 du_1 du_2 = \int_{-K}^K \operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 du_1 \int_{-2L}^{2L} \overline{\operatorname{sn}} u_2 du_2 = 0.$$

Es werden also die durch die Formeln (20) dargestellten Werthe von ξ, η, ζ Integrale der partiellen Differentialgleichungen (1) sein, welche

die folgenden Eigenschaften haben: für $t = 0$ sind ihre Werthe sämmtlich $= 0$, während die Anfangswerthe von $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ respective gleich sind:

$$0, \quad \frac{4\pi}{b} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y}, \quad - \frac{4\pi}{b} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z},$$

wo $f(x, y, z)$ eine willkürliche Function von x, y, z ist. Diese Werthe von ξ, η, ζ sind dadurch erhalten, dass wir die Integration über die äussere Schaafe der Wellenfläche erstreckt haben. Wenn man nun aus ähnlichen Formeln ausgeht, welche aber über die *innere* Schaafe der Wellenfläche erstreckt werden, und in welchen statt $f(x + u, \dots)$ eine andere willkürliche Function $F(x + u, \dots)$ vorkommt, so kommt man zu Werthen von ξ, η, ζ , welche auch Integrale der Gleichungen (1) darstellen und so beschaffen sind, dass sie für $t = 0$ sämmtlich verschwinden, während die Werthe von $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_0$ respective

$$- \frac{4\pi}{b} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{b} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}, \quad 0$$

sind. Durch Combination von diesen beiden Systemen von Werthen für ξ, η, ζ kommt man zu einem System von Integralen der vorgelegten Differentialgleichungen, welche die Eigenschaft haben, dass für $t = 0$

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=0} = - \frac{4\pi}{b} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{4\pi}{b} \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = - \frac{4\pi}{b} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}$$

ist. Die Functionen ξ, η, ζ sind der Bedingung unterworfen worden, dass ihre Anfangswerthe den Gleichungen

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

genügen. Man kann aber bekanntlich, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ irgend 3 Functionen von x, y, z sind, unter welchen die Relation

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0$$

besteht, immer zwei Functionen $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ finden, so dass

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \varphi_2 &= \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \right) \\ \varphi_3 &= - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\end{aligned}$$

ist. Die betrachteten Werthe von ξ, η, ζ stellen also die allgemeinsten Integrale der Differentialgleichungen (1) dar, welche zu gleicher Zeit ungrade Functionen von t sind.

Nimmt man nun von diesen Werthen von ξ, η, ζ die ersten Ableitungen nach t , so kommt man zu einem Systeme von Integralen, welche grade Functionen von t sind. Die Combination der beiden Systeme mit einander liefert also das allgemeine System von Integralen der Differentialgleichungen (1), welche nur der Bedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

unterworfen sind.

Hiermit ist also diejenige Aufgabe, die ich mir gestellt habe, vollständig gelöst. Nun werde ich aber noch Folgendes bemerken.

Die partiellen Differentialgleichungen (1) sind von LAMÉ unter der Voraussetzung, dass die Verrückungen ξ, η, ζ der Gleichung

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

genügen, aufgestellt worden. Wenn man diese Voraussetzung fallen lässt, so kommt man, wie es KIRCHHOFF in seinen Vorlesungen über Mechanik gezeigt hat, zu einem Systeme von Differentialgleichungen, welches sich von dem Systeme (1) nur dadurch unterscheidet, dass auf der rechten

Seite jeder Gleichung respective das Glied $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ multiplicirt mit einer Constante hinzutritt.

Es ist nun leicht, auch von diesem Systeme von Differentialgleichungen das allgemeine Integralsystem aufzustellen.

Es sei in der That ξ , η , ζ ein System von Integralen desselben, so setze man

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1$$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_1.$$

Bestimmt man nun die Function u mittelst der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

oder, wie ich zur Abkürzung schreiben werde

$$(21) \quad \Delta u - \theta = 0,$$

so bilden ξ , η , ζ ein System von Integralen der Gleichung (1), für welche die Relation

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0$$

statt findet. Dieselben sind also durch die oben aufgestellten Formeln darstellbar. Was nun die Function u betrifft, so muss dieselbe ausser der Gleichung (21) noch den folgenden Gleichungen

$$D_x(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

$$D_y(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

$$D_z(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

genügen. Es ist aber auf folgende Weise möglich diese Gleichungen gleichzeitig zu befriedigen.

Man bestimme zwei Functionen u_0 und u_1 von x, y, z aus den beiden Differentialgleichungen

$$\Delta u_0 = (\theta)_{t=0}$$

$$\Delta u_1 = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0}.$$

Wenn man dann für u diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

nimmt, welche durch die Bedingungen

$$(u)_{t=0} = u_0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = u_1$$

bestimmt ist, so wird auch Δu eine Lösung der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - \Delta)\zeta = 0$$

sein, und zwar sind die Werthe von Δu und ihrer Ableitung nach t für $t=0$ gleich Δu_0 respective Δu_1 . Sie stimmen also mit den Anfangswerten von θ und $\frac{d\theta}{dt}$ überein. Da nun θ derselben Differentialgleichung genügt, so ist mithin für alle Werthe von t

$$\Delta u = \theta.$$

u genügt also den erforderlichen Bedingungen.

ENTWICKLUNG DER WURZELN
EINER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG
IN SUMMEN VON RATIONALEN FUNCTIONEN
DER COEFFICIENTEN

VON

C. RUNGE

in BERLIN.

Nach einem von DANIEL BERNOULLI angegebenen Verfahren wird die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung auf folgende Weise aus den Coefficienten berechnet.

Sei s_n die Summe der $(-n)^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln, also eine rationale Function der Coefficienten, so nähert sich der Quotient s_{n-1} dividiert durch s_n mit wachsendem n der dem absoluten Betrage nach kleinsten Wurzel, wenn eine solche existirt.

Diese Methode ist im Folgenden verwendet, um auch bei variablen Coefficienten die Wurzeln darzustellen. Sie ergeben sich als unendliche Summen von rationalen Functionen derselben. Die Gesamtheit der Werthsysteme der Coefficienten, für welche die Convergenz dieser Summen aufhört, besteht aus Theilen eines algebraischen Gebildes von einer um wenigstens eine Einheit niedrigeren Stufe als das Gebiet der Coefficienten, sei es nun, dass man sie als unabhängige Variable betrachtet, oder dass man ihnen irgend welche Beschränkung auferlegt. Seien x_1, x_2, \dots, x_n die Wurzeln, wie sie durch die n Ausdrücke dargestellt sind. Nähert man sich einem Punkte der Convergenzgrenze, so gehen x_1, x_2, \dots, x_n in die Wurzeln, welche diesem Punkte entsprechen, über. Nähert man sich demselben Punkte auf einem anderen Wege, so ist nicht gesagt, dass

x_1, x_2, \dots, x_n in derselben Reihenfolge wie vorhin in die Wurzeln dieses Punktes übergehen. Mit andern Worten beim Überschreiten der Grenze können x_1, x_2, \dots, x_n Sprünge machen. Will man den stetigen Verlauf der Wurzeln verfolgen, so muss man beim Überschreiten der Grenze auf x_1, x_2, \dots, x_n eine gewisse Substitution anwenden. Die Convergenzgrenze zerfällt in eine endliche Anzahl von Theilen. Jedem Theile entspricht eine gewisse Substitution. Um den Zusammenhang der Wurzeln für die Endpunkte eines vorgelegten Weges im Gebiete der Coefficienten zu erkennen, braucht man nur die Durchschnittspunkte des Weges mit der Convergenzgrenze aufzusuchen.

Für den Fall, dass die Coefficienten als rationale Functionen eines Parameters aufgefasst werden, besteht unsre Convergenzgrenze aus Stücken algebraischer Curven, welche in der complexen Ebene des Parameters liegen. Diese geben, nachdem festgestellt ist, welche Substitution jedem Theile entspricht, die vollständige Einsicht in den Zusammenhang der Wurzeln für die Endpunkte eines in der Ebene des Parameters vorgelegten Weges. Sie erlauben ohne Weiteres die RIEMANN'sche Fläche der Gleichung zu construiren.

Man bemerke indessen, dass umgekehrt die RIEMANN'sche Fläche nicht dieselbe Einsicht in den Zusammenhang der Wurzeln gewährt. Sie dient nur dazu die Vertauschungen der Wurzeln für geschlossene Wege erkennen zu lassen, ohne dass man die Wurzel, welche einem bestimmten Punkte der RIEMANN'schen Fläche entspricht, numerisch anzugeben im Stande ist.

Aus

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

folgt durch logarithmische Differenziation

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Wenn jetzt z von x_1, x_2, \dots, x_n verschieden ist, so lassen sich beide Seiten dieser Gleichung nach positiven Potenzen von $(x - z)$ entwickeln und man erhält durch Vergleichung der Coefficienten

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]_{x=z} = - \sum_{\nu} (x_{\nu} - z)^{-\lambda-1}, \quad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

Die linke Seite ist eine rationale ganzzahlige Function von z und den Coefficienten von $f(x)$, also wird auch der Quotient

$$\frac{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda}}{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda-1}} \quad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

eine rationale Function von z und den Coefficienten von $f(x)$, welche mit $R_\lambda(z)$ bezeichnet werden möge

$$R_\lambda(z) = \frac{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda}}{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda-1}} = (1 - \frac{z}{x_1})^{\lambda} \frac{\sum (\frac{x_1 - z}{x_\nu - z})^{\lambda}}{\sum (\frac{x_1 - z}{x_\nu - z})^{\lambda+1}} \quad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

Wenn z der Wurzel x_1 näher liegt als allen übrigen, so nähert sich $R_\lambda(z)$ mit wachsendem λ der Grösse $x_1 - z$. In der That bezeichnet man den grössten der absoluten Beträge von

$$\frac{x_1 - z}{x_2 - z}, \frac{x_1 - z}{x_3 - z}, \dots, \frac{x_1 - z}{x_n - z}$$

mit ε , wo also $\varepsilon < 1$ ist, so ist der absolute Betrag von $R_\lambda(z) - (x_1 - z)$ kleiner als

$$(x_1 - z) \frac{2(n-1)\varepsilon^\lambda}{1 - (n-1)\varepsilon^{\lambda+1}}$$

vorausgesetzt, dass $(n-1)\varepsilon^{\lambda+1} < 1$, was bei hinreichend grossem λ sicher zutrifft.

Denke ich mir nun unter den Grössen z, x_1, x_2, \dots, x_n nicht mehr bestimmte Werthe, sondern Variable und betrachte die Umgebung einer Stelle $(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$, für welche die absoluten Beträge von

$$\frac{x_1 - z}{x_2 - z}, \dots, \frac{x_1 - z}{x_n - z}$$

kleiner als 1 sind, so wird, wenn die Umgebung hinreichend klein gewählt ist, die obere Grenze der absoluten Beträge dieser Ausdrücke für alle Stellen im Innern der Umgebung kleiner als 1 sein. Bezeichnen wir dieselbe mit ε , so wird der absolute Betrag von $R_\lambda(z) - (x_1 - z)$ für alle Stellen der Umgebung kleiner sein als

$$(x_1 - z) \frac{2(n-1)\varepsilon^\lambda}{1 - (n-1)\varepsilon^{\lambda+1}}.$$

Man kann daher einen Werth von λ finden, so gross, dass $z + R_\lambda(z)$ für alle Stellen der Umgebung die Wurzel x_1 mit vorgeschriebener Genauigkeit darstellt. Oder mit andern Worten: In der Umgebung einer jeden Stelle $(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$, für welche x_1 der Grösse z näher liegt als die übrigen Wurzeln, convergirt der Ausdruck

$$z + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(z)$$

gleichmässig und ist gleich x_1 . Jeden solchen Grenzausdruck kann man auch in Form einer Summe schreiben:

$$z + R_1 + (R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + \dots$$

Das ist nur eine andre Schreibweise, denn eine unendliche Summe bedeutet nichts Anderes als die Grenze, der sich die Summe der ersten λ Glieder mit wachsendem λ nähert.

Da $R_\lambda(z)$ eine symmetrische Function von x_1, x_2, \dots, x_n ist, so liegt jede Stelle $(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ im Innern des Bereiches der gleichmässigen Convergence, für welche eine der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n der Grösse z näher liegt als alle übrigen, und nur solche Stellen könnten der Grenze des Bereiches angehören, für welche zwei oder mehrere der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n , welche der Grösse z näher liegen als die übrigen, gleich weit von z entfernt sind. Man kann nun zeigen, dass diese Stellen auf der Grenze des Bereichs liegen *müssen*. Denn sei z. B.

$$|x_1 - z| = |x_2 - z| = \dots = |x_a - z| < |x_{a+v} - z| \quad (v=1, 2, \dots, n-a)$$

so kann ich durch eine beliebig kleine Änderung δ von x_1 allein bewirken, dass $x_1 + \delta$ der Stelle z näher liegt als alle übrigen Wurzeln.

Dann wird

$$z + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(z)$$

convergiren und gleich $x_1 + \delta$ sein.

Lasse ich nun die Änderung von x_1 kleiner und kleiner werden, jedoch so, dass $|x_1 + \delta - z|$ beständig kleiner bleibt als $|x_2 - z|, \dots, |x_n - z|$, so bleibt

$$z + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(z)$$

convergent und nähert sich mehr und mehr dem Werthe x_1 . Dasselbe gilt von x_2, \dots, x_a . Ich könnte mich der Stelle x_1, x_2, \dots, x_n auch in der Weise nähern, dass der Werth von

$$z + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(z)$$

sich dem Werthe x_2 mehr und mehr näherte, oder einem der Werthe x_3, \dots, x_a . Sind nun die Werthe x_1, x_2, \dots, x_a nicht alle einander gleich, so ist mithin

$$z + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(z)$$

an der Stelle (x_1, x_2, \dots, x_n) unstetig. An einer solchen Stelle hört daher die *gleichmässige* Convergenz auf. Ob damit zugleich die Convergenz aufhört, mag dahin gestellt bleiben.

Wenn ferner $x_1 = x_2 = \dots = x_a$ ist, so liegen in jeder Nähe Stellen (x'_1, \dots, x'_n) , wofür x'_1, \dots, x'_a der Stelle z gleich nahe liegen, aber nicht sämmtlich einander gleich sind, welche mithin der Convergenzgrenze angehören. Das wäre nicht möglich, wenn (x_1, x_2, \dots, x_n) im Innern des Bereichs der gleichmässigen Convergenz läge.

Es convergirt jedoch

$$z + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(z)$$

(wenn auch nicht gleichmässig) und stellt den gemeinsamen Werth von x_1, x_2, \dots, x_a dar.

Denn es ist

$$R_\lambda(z) = (x_1 - z) \frac{\sum_{\nu=1}^{\lambda} \binom{r_1 - \alpha}{r_\nu - z} z^{\nu-1}}{\sum_{\nu=1}^{\lambda} \binom{r_1 - \alpha}{r_\nu - z} z^{\nu-1}} \quad (\nu=1, 2, \dots, \lambda)$$

$$(x_1 - z) \frac{\alpha + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \binom{r_1 - \alpha}{r_\nu - z} z^{\nu-1}}{\alpha + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \binom{r_1 - \alpha}{r_\nu - z} z^{\nu-1}} \quad (\nu=\alpha+1, \dots, n)$$

Wenn daher

$$\left| \frac{r_1 - \alpha}{r_\nu - z} \right| < \varepsilon < 1, \quad (\nu=\alpha+1, \dots, n)$$

so folgt

$$|z + R_\lambda(z) - x_1| \leq \frac{2(n-\alpha)\varepsilon^\lambda}{\alpha - (n-\alpha)\varepsilon^{\lambda+1}}.$$

(sobald $\alpha > (n - \alpha)\varepsilon^{\lambda+1}$).

Die rechte Seite wird mit wachsendem λ beliebig klein und zwar um so rascher je grösser α ist.

Betrachtet man $z + R_\lambda(z)$ nicht mehr als Function von x_1, x_2, \dots, x_n , sondern als Function der Coefficienten von $f(x)$, die wir mit X_1, X_2, \dots, X_n bezeichnen wollen, so wird der Bereich der gleichmässigen Convergenz von allen denjenigen Stellen (X_1, X_2, \dots, X_n) gebildet werden, für welche eine der Wurzeln von $f(x)$ z näher liegt als alle übrigen.

Ich behaupte, dass bei einem festen Werthe von z dieser Bereich in dem $2n$ -fach ausgedehnten Gebiete der Grössen X_1, X_2, \dots, X_n ein zusammenhängender ist, dergestalt, dass man von jeder Stelle desselben auf stetigem Wege zu jeder anderen gelangen kann, ohne den Bereich zu verlassen. Ich nenne die Wurzeln des einen Coefficientensystems

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$$

geordnet nach ihrer Entfernung von z , so dass

$$|x'_1 - z| < |x'_2 - z| \leq |x'_3 - z| \leq \dots \leq |x'_n - z|$$

und ebenso die des anderen

$$x''_1, x''_2, \dots, x''_n.$$

Man betrachte zuvörderst x_1 und x'_1 , und führe die von z weiter entfernte in die andere über, ohne diese Entfernung unterwegs zu vergrössern. Ebenso verfähre man nun nach der Reihe mit x_2 und x'_2 , mit x_3 und x'_3 , u. s. f. Dadurch ist ein stetiger Übergang von (x_1, x_2, \dots, x_n) und $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ zu einer dritten Stelle und daher auch ein solcher zwischen den beiden Stellen hergestellt, bei welchem die Anordnung der Grössen nach ihrer Entfernung von z stets dieselbe bleibt. Da nun jedem stetigen Wege im Gebiete der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n ein stetiger Weg im Gebiete der Grössen X_1, X_2, \dots, X_n entspricht, so ist auch hier der Übergang bewerkstelligt. Das gilt auch noch für den Bereich aller

Stellen (X_1, X_2, \dots, X_n) , für welche alle Wurzeln verschiedene Entfernung von z besitzen, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht. Die hierbei ausgeschlossenen Stellen enthalten unter sich natürlich auch alle diejenigen, wofür keine Wurzel der Stelle z näher liegt als die übrigen.

Wir werden ihre Gesamtheit jetzt näher betrachten.

Man kann an die Stelle der Gleichung $|x_n - z| = |x_\nu - z|$ auch die Forderung setzen, dass

$$\begin{aligned} (x_n - z) + (x_\nu - z) \\ (x_n - z) - (x_\nu - z) \end{aligned}$$

unendlich oder rein imaginär sei. Denn bei festem Werthe von z und endlichen Werthen von x_μ, x_ν (und auf solche allein kommt es hier an) ist der Ausdruck nur unendlich für $x_\nu = x_\mu$; sein reeller Theil ist aber, wenn

$$x_\mu - z = u_\mu + v_\mu i, \quad x_\nu - z = u_\nu + v_\nu i$$

gesetzt wird, gleich:

$$\begin{aligned} (u_\mu^2 + v_\mu^2) - (u_\nu^2 + v_\nu^2) \\ (u_\mu - u_\nu)^2 + (v_\mu - v_\nu)^2 \end{aligned}$$

Diejenigen Stellen (X_1, X_2, \dots, X_n) , wofür zwei oder mehr Wurzeln von $f(x)$ gleiche Entfernung von z haben, bestehen also erstens aus denjenigen, wofür zwei oder mehr Wurzeln einander gleich sind, d. h. wofür die Discriminante verschwindet, zweitens aus denjenigen Stellen, wofür eine der Grössen

$$\frac{x_\mu + x_\nu - 2z}{x_\mu - x_\nu}$$

rein imaginär oder, was dasselbe ist, wofür

$$\left(\frac{x_\mu + x_\nu - 2z}{x_\mu - x_\nu} \right)^2$$

negativ ist.

Diese Grössen sind die Wurzeln der Gleichung

$$\prod_{\mu, \nu} \left[y - \left(\frac{x_\mu + x_\nu - 2z}{x_\mu - x_\nu} \right)^2 \right] = 0. \quad \begin{matrix} (\mu=1, 2, \dots, n) \\ (\nu=\mu+1, \dots, n) \end{matrix}$$

Als symmetrische Function von x_1, x_2, \dots, x_n kann dieser Ausdruck auf die Form gebracht werden:

$$\frac{G(y, X_1, X_2, \dots, X_n, z)}{D(X_1, X_2, \dots, X_n)} = 0,$$

wo G eine ganze Function von y, X_1, \dots, X_n, z und D die Discriminante bedeutet. Es handelt sich darum, die Bedingung zu finden, welcher X_1, X_2, \dots, X_n unterliegen, damit diese Gleichung durch einen reellen negativen Werth von y befriedigt werden könne. Zu dem Ende setze man:

$$y = u + vi, \quad X_\nu = U_\nu + U_{n+\nu}i, \quad z = r + si$$

und löse G in seinen reellen und imaginären Theil auf

$$\begin{aligned} & G(y, X_1, X_2, \dots, X_n, z) \\ &= R(u, v, U_1, \dots, U_{2n}, r, s) + S(u, v, U_1, \dots, U_{2n}, r, s)i, \end{aligned}$$

wo R und S ganze ganzzahlige Functionen der Argumente sind.

Soll $G=0$ eine reelle Wurzel haben, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$R(u, v, U_1, \dots, U_{2n}, r, s) = 0, \quad S(u, v, U_1, \dots, U_{2n}, r, s) = 0;$$

R und S können für beliebige Werthe von U_1, U_2, \dots, U_{2n} keinen gemeinsamen Theiler haben. Denn angenommen es wäre der Fall, so gebe ich x_1, x_2, \dots, x_n solche Werthe, dass sämtliche $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ Wurzeln von G negativ und von einander verschieden sind. Man sieht leicht, dass dies erreicht werden kann durch richtige Vertheilung von x_1, x_2, \dots, x_n auf der Peripherie eines um z gezogenen Kreises.

Nummehr muss auch der Theiler von \bar{R} und \bar{S} lauter verschiedene negative Wurzeln haben. Ändere ich daher U_1, U_2, \dots, U_{2n} auf irgend eine Weise hinreichend wenig, so müssen die sämtlichen Wurzeln des gemeinsamen Theilers von R und S negativ bleiben.

Denn bekanntlich kann sich die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen veränderlichen Coefficienten nur dadurch ändern, dass zwei Wurzeln einander gleich werden, was für hinreichend kleine Änderungen von U_1, U_2, \dots, U_{2n} sicher nicht der Fall ist. Mithin hätte alsdann für alle hinreichend kleinen Änderungen von U_1, U_2, \dots, U_{2n} G eine negative Wurzel. Das ist aber nicht möglich, weil ich U_1, U_2, \dots, U_{2n} solche beliebig kleine Änderungen geben kann, dass die sämtlichen Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n verschiedene Entfernung von z erlangen.

Mithin kann die Resultante von \bar{R} und \bar{S}

$$\varphi(U_1, U_2, \dots, U_{2n}, r, s)$$

nicht für beliebige Werthe von U_1, U_2, \dots, U_{2n} verschwinden, sondern ihr Verschwinden definirt in dem $2n$ -fach ausgedehnten Gebiete der Grössen U_1, U_2, \dots, U_{2n} ein Gebilde $(2n - 1)^{\text{ter}}$ Stufe, von welchem die Convergengzgrenze ein Theil ist. Es ist nicht gesagt, dass umgekehrt jeder Stelle U_1, U_2, \dots, U_{2n} , wofür $\varphi = 0$ ist, eine reelle Wurzel von $G = 0$ entspricht. Denn es könnten ja R und S einen gemeinsamen Theiler ohne reelle Wurzeln besitzen. Jedenfalls aber wird die Gesamtheit der Stellen U_1, U_2, \dots, U_{2n} , wofür $G = 0$ eine reelle Wurzel hat, einem monogenen Gebilde angehören, wie wir sogleich zeigen werden. Bezeichnen wir die Gleichung desselben mit $\varphi = 0$, so muss also φ entweder gleich φ oder ein irreductibler Theiler von φ sein.

Setzt man:

$$\frac{(x_1 - z) + (x_2 - z)}{x_1 - x_2} = \rho \quad \text{oder} \quad x_1 - z = \frac{\rho + 1}{\rho - 1} (x_2 - z) \quad \text{und} \quad x_{a+1} = u_a + u_{2a}i$$

(wo ρ eine reelle Grösse bedeutet), so kann man U_1, U_2, \dots, U_{2n} als rationale Functionen von $\rho, u_1, u_2, \dots, u_{2n-2}$ ausdrücken. Giebt man hierin $\rho, u_1, u_2, \dots, u_{2n-2}$ alle reellen Werthe, so erhält man alle Stellen U_1, U_2, \dots, U_{2n} , wofür G eine positive Wurzel besitzt. Diese gehören daher einem monogenen Gebilde an. Indem man an Stelle von $\rho, \rho i$ einführt, ergibt sich auf dieselbe Weise, dass alle diejenigen Stellen, wo G eine negative Wurzel besitzt ebenfalls einem monogenen Gebilde angehören. Aber in beiden Fällen liegt dasselbe monogene Gebilde vor, wie man folgendermassen einsieht.

Sei A_1, A_2, \dots, A_n ein Werthsystem der Coefficienten X_1, X_2, \dots, X_n , wofür die zwei Wurzeln x_1 und x_2 und nur diese einander gleich werden: $x_1 = x_2 = a$. Solange dann die Stelle (X_1, X_2, \dots, X_n) hinreichend nahe bei (A_1, A_2, \dots, A_n) liegt, so bleiben x_1 und x_2 beliebig nahe bei a und es ist nach CAUCHY

$$(x_1 - a) + (x_2 - a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(t-a)f'(t)}{f(t)} dt,$$

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(t-a)^2 f'(t)}{f(t)} dt$$

die beiden Integrale über kleine Kreise mit dem Mittelpunkte a erstreckt. Dabei muss (X_1, X_2, \dots, X_n) so nahe bei (A_1, A_2, \dots, A_n) angenommen werden, dass x_1 und x_2 im Innern des Kreises, die übrigen Wurzeln dagegen ausserhalb desselben liegen.

Aus diesen beiden Gleichungen überzeugt man sich, dass die Entwicklung von

$$\left(\frac{x_1 + x_2 - 2z}{x_1 + x_2 - 2z} \right)^2 \text{ oder } \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2}{(x_1 + x_2 - 2z)^2} = \frac{(x_1 - a + x_2 - a)^2}{(x_1 + x_2 - 2z)^2}$$

nach ganzen positiven Potenzen von $X_1 - A_1, \dots, X_n - A_n$ möglich ist und mit den linearen Gliedern

$$-8a^{n-1}(X_1 - A_1) + a^{n-2}(X_2 - A_2 + \dots + (X_n - A_n)) \\ + (a - z)^2 f''(a)$$

anfängt, unter $f''(a)$ diejenige Grösse verstanden, welche entsteht, wenn ich in $f''(a)$ $X_1 = A_1, X_2 = A_2, \dots, X_n = A_n$ setze.

a muss dabei von z verschieden angenommen werden. Unter dieser Bedingung aber lässt sich $X_n - A_n$ nach Potenzen von $X_1 - A_1, \dots, X_{n-1} - A_{n-1}$ und $\left(\frac{x_1 + x_2 - 2z}{x_1 + x_2 - 2z} \right)^2$ (wofür der Kurze halber σ geschrieben werde) entwickeln.

Geben wir hier σ positive Werthe, so liefern die reellen und imaginären Theile von X_1, X_2, \dots, X_n ein Stück desjenigen Gebildes, wofür

$G=0$ eine positive Wurzel hat, für negative Werthe von σ dagegen erhält man ein Stück desjenigen Gebildes, wofür $G=0$ eine negative Wurzel hat. Es erhellt daher, dass beide einem einzigen monogenen Gebilde angehören.

Wir wollen nun untersuchen, auf welche Weise man algebraisch die beiden Theile zu trennen im Stande ist.

Es lässt sich zunächst zeigen, dass \bar{R} und \bar{S} auf dem Gebilde $\bar{\varphi}=0$ nicht überall einen Theiler von höherem als dem ersten Grade haben können. Nimmt man nämlich wieder U_1, U_2, \dots, U_{2n} so an, dass alle Wurzeln von $G=0$ negativ und von einander verschieden sind, so müsste jeder Theiler von R und S auch lauter verschiedene negative Wurzeln haben. Hätten nun R und S für beliebige Werthe von U_1, U_2, \dots, U_{2n} auf $\bar{\varphi}=0$ einen gemeinsamen Theiler, so müssten die Wurzeln desselben negativ bleiben, wenn U_1, U_2, \dots, U_{2n} sich hinreichend wenig von jenen Werthen entfernen. Das ist aber nicht möglich; denn in der Nähe jeder Stelle (U_1, \dots, U_{2n}) , wo alle Wurzeln die gleiche Entfernung von z haben, liegen Stellen, wo nur zwei Wurzeln gleich weit von z abliegen.

Die Bedingung, dass \bar{R} und \bar{S} einen Factor von höherem als dem ersten Grade haben, kann daher nicht für alle Stellen von $\bar{\varphi}=0$ erfüllt sein. Diese Bedingung lässt sich bekanntlich in die Form einer algebraischen Gleichung zwischen U_1, U_2, \dots, U_{2n} bringen. Und da ferner $\varphi=0$ irreductibel ist, so kann die Gesamtheit derjenigen Stellen auf $\varphi=0$, wo ein Theiler höheren Grades möglich ist, nur ein Gebilde $(2n-2)^{\text{ter}}$ Stufe ausmachen.

Wenn man von diesem absieht, so haben für alle übrigen Stellen des Gebildes die beiden Functionen \bar{R} und \bar{S} nur einen gemeinsamen Theiler ersten Grades und es wird daher die gemeinsame Wurzel ausgedrückt werden können als rationale Function von $U_1, U_2, \dots, U_{2n}, r, s$:

$$\sigma = \psi(U_1, \dots, U_{2n}, r, s).$$

Durch die Bedingung $\psi < 0$ sind nun diejenigen Stellen des monogenen Gebildes $\bar{\varphi}=0$, wo zwei Wurzeln die gleiche Entfernung von z erhalten, von den übrigen Stellen desselben Gebildes getrennt. Ändert man z , so ändert sich das Gebilde $\varphi=0$. Aber wie man auch z wähle, $\varphi=0$

enthält immer das Gebilde $(2n - 2)^{\text{ter}}$ Stufe, auf welchem die Discriminante von $f(x)$ verschwindet. Und zwar sind dies die einzigen Stellen, welche allen Gebilden $\bar{\varphi} = 0$ gemeinsam sind. Denn wenn x_1, x_2, \dots, x_n von einander verschieden sind, so lässt sich z immer so wählen, dass $G = 0$ keine reelle Wurzel hat. Man braucht z nur so anzunehmen, dass weder zwei Wurzeln die gleiche Entfernung von z haben noch zwei Wurzeln mit z auf derselben Graden liegen. Hat $G = 0$ keine reelle Wurzel, so enthält das entsprechende Gebilde $\bar{\varphi} = 0$ diese Stelle nicht.

Beschränkt man die Coefficienten auf ein monogenes Gebilde m^{ter} Stufe, für welches die Discriminante nicht identisch verschwindet, so wird in diesem Gebiete die Convergengzgrenze unter der Gesamtheit derjenigen Stellen enthalten sein, welche das Gebilde m^{ter} Stufe mit $\varphi = 0$, $\varphi' < 0$ gemein hat. Die Gesamtheit der gemeinsamen Punkte kann nun zwar für besondere Werthe von z ein Gebiet m^{ter} Stufe bilden, aber nicht für alle Werthe von z . Denn in diesem Falle würde nach dem Obigen das Gebilde ganz in das Discriminantengebilde fallen, was wider die Voraussetzung ist. Die Convergengzgrenze ist mithin höchstens von der $(m - 1)^{\text{ten}}$ Stufe.

Wir haben in den voranstehenden Erörterungen immer die Gesamtheit der Stellen in Betracht gezogen, für welche irgend zwei Wurzeln gleich weit von z entfernt liegen, während, wie wir sahen, die Convergengzgrenze des Ausdrucks für die Wurzel nur aus denjenigen Stellen besteht, wofür die beiden nächsten Wurzeln die gleiche Entfernung erhalten. Das hat abgesehen von der grösseren Symmetrie den Vortheil, dass wir zu gleicher Zeit auch die Untersuchung über die Convergengzgrenze anderer Ausdrücke erledigt haben, welche wir jetzt für die übrigen Wurzeln aufstellen werden.

Sei $|x_1 - z| < |x_2 - z| < \dots < |x_n - z|$, so ist $|(x_1 - z)(x_2 - z)|$ kleiner als jedes andere Product je zweier der n Grössen. Es wird daher

$$P_k^{(2)}(z) = \frac{\sum (x_\alpha - z)(x_\beta - z)^{-\lambda}}{\sum (x_\alpha - z)(x_\beta - z)^{-\lambda-1}}$$

(die Summe erstreckt über alle Combinationen von je 2 Wurzeln) mit wachsendem λ gegen $(x_1 - z)(x_2 - z)$ convergiren. (Der obere Index

2 in $R_k^{(2)}(z)$ soll der Anzahl der Factoren in $(x_1 - z)(x_2 - z)$ entsprechen. Der Symmetrie wegen möge fortan das was früher $R_k(z)$ hieß mit $R_k^{(1)}(z)$ bezeichnet werden.) Die Convergengzgrenze dieses Ausdrucks wird von alle denjenigen Stellen gebildet, wofür die zweit-nächste und dritt-nächste Wurzel den gleichen Abstand von z erhalten. Daher wird

$$x_2 = z + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_k^{(2)}(z)}{R_k^{(1)}(z)}$$

convergiren, so lange nicht entweder $|x_1 - z| = |x_2 - z|$ oder $|x_2 - z| = |x_3 - z|$ ist.

Auf dieselbe Weise bilden wir Ausdrücke für x_3, x_4, \dots, x_n , indem wir die Summen über alle Combinationen von je drei, je vier u. s. w. Factoren erstrecken. Die Convergengzgrenze des Ausdruckes für x_v besteht alsdann aus alle den Stellen, wofür entweder $|x_{v-1} - z| = |x_v - z|$ oder $|x_v - z| = |x_{v+1} - z|$ ist. Das oben algebraisch dargestellte Gebilde besteht aus den Convergengzgrenzen der sämtlichen n Ausdrücke.

Wir haben also den Satz, dass von jeder Stelle (X_1, X_2, \dots, X_n) des gemeinschaftlichen Bereiches gleichmässiger Convergenz der u für die Wurzeln aufgestellten Ausdrücke sich ein stetiger Übergang machen lässt zu jeder andern Stelle des Bereiches, ohne seine Grenze zu berühren. Die Grössen $\sum(x_a - z)^{-\lambda}$, $\sum[(x_a - z)(x_\beta - z)]^{-\lambda}$, etc. aus denen die Ausdrücke $R_k^{(1)}(z)$ zusammengesetzt sind, bilden mit abwechselndem Vorzeichen die Coefficienten von x, x^2, \dots , in der Function

$$\varphi(x) = f(z)^{-\lambda} \prod_{\alpha} [x - (x_\alpha - z)^\lambda] \quad (\alpha=1, 2, \dots, n)$$

Dies gewährt ein Mittel um die genannten Ausdrücke durch die Coefficienten von $f(x)$ darzustellen. Setzt man nämlich in der obigen Gleichung u^λ an Stelle von x , so kann man jeden der Factoren $u^\lambda - (x_\alpha - z)^\lambda$ in Linear-Factoren zerlegen. Denn es ist, wenn ω eine primitive λ^{te} Einheitswurzel bezeichnet

$$u^\lambda - (x_\alpha - z)^\lambda = (-1)^{\lambda+1} \prod_{\beta} [\omega^\beta u - (x_\alpha - z)]. \quad (\beta=1, 2, \dots, \lambda)$$

Mithin

$$\varphi(u^\lambda) = (-1)^{\lambda n + n} f(z)^{-\lambda} \prod_{\beta} \prod_{\alpha} [\omega^\beta u - (x_\alpha - z)] = (-1)^{\lambda n + n} f(z)^{-\lambda} \prod_{\beta} f(\omega^\beta u + z).$$

Man hat also nichts weiter zu thun als in

$$\prod_{\beta} f(\omega^{\beta} u + z)$$

die Coefficienten von u^1, u^{2^1}, \dots zu berechnen, um die Ausdrücke der gesuchten Grössen durch X_1, X_2, \dots, X_n zu finden.

UN THÉORÈME D'ALGÈBRE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

T. J. STIELTJES

A LEYDE.

Voici un théorème d'algèbre qui s'est présenté à moi en étudiant les formules analytiques qui servent à exprimer le déplacement d'un système invariable autour d'un point fixe. (Voir DUHAMEL: *Cours de mécanique*, introduction.)

Soient

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

les coefficients de deux substitutions orthogonales à déterminant $+1$ et

$$R = \begin{vmatrix} A + a & B + b & C + c \\ A' + a' & B' + b' & C' + c' \\ A'' + a'' & B'' + b'' & C'' + c'' \end{vmatrix}.$$

alors ce déterminant R (qui visiblement n'est pas identiquement zéro) jouit de cette propriété que lorsque $R = 0$ en même temps tous ses mineurs du second degré s'évanouissent. Je trouve en effet que le carré d'un tel mineur peut se mettre sous la forme:

$R \times$ Fonction entière de $a, \dots, c'', A, \dots, C''$.

Voici la signification géométrique de ce théorème. Lorsque, par l'effet du déplacement, un seul point (x, y, z) vient dans la position $(-x, -y, -z)$ cela entraîne nécessairement que tous les points d'un certain plan jouissent de la même propriété. Le déplacement se ramène à une rotation de 180° autour d'un certain axe. — C'est du reste un cas d'exception qui échappe à l'analyse de M. DUHAMEL. Les formules de M. DUHAMEL cessent de déterminer l'axe de rotation (qui pourtant est parfaitement déterminé) parce qu'on a $p = 0, q = 0, r = 0$. (On a $p^2 + q^2 + r^2 = \sin \omega^2$ dans la notation de M. DUHAMEL.)

Ce théorème d'algèbre subsiste encore dans le cas de deux variables

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

et j'ai lieu de penser qu'il en est de même pour quatre variables, bien que je ne l'aie pas encore complètement démontré. Serait-il donc possible de l'étendre à un nombre quelconque de variables? Ce sujet a quelque rapport au théorème de M. BRIOSCHI, que l'équation:

$$\begin{vmatrix} a + z & b & c & \dots & k \\ a' & b' + z & c' & \dots & k' \\ a'' & b'' & c'' + z & \dots & k'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(n-1)} & b^{(n-1)} & c^{(n-1)} & \dots & k^{(n-1)} + z \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines réciproques et imaginaires (abstraction faite de la racine $z = -1$ lorsque n est impair⁽¹⁾).

Leyde, 29 Août 1884.

(¹) Journ. de LIOUVILLE, T. 19, 1^e Sér. p. 253.

SUR CERTAINS POLYNÔMES
QUI VÉRIFIENT UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE
DU SECOND ORDRE
ET SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS DE LAMÉ

PAR

T. J. STIELTJES

à LEYDE.

1. Dans les Comptes rendus de l'académie des sciences de Berlin, Année 1864 (et dans son Traité des fonctions sphériques, Tome I, pag. 472 e. s., 2^{de} Edit.) M. HEINE a démontré la proposition suivante.

Soient A et B deux polynômes donnés en x , le premier du degré $p + 1$, le second du degré p au plus — ces polynômes étant d'ailleurs tout à fait généraux et n'étant assujettis à aucune condition, et considérons l'équation différentielle:

$$(1) \quad A \frac{d^2 y}{dx^2} + 2B \frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

où C est un polynôme en x du degré $p - 1$ au plus.

Alors il existe toujours certaines déterminations particulières du polynôme C , telles que l'équation (1) admette comme intégrale un polynôme en x du degré n . Le nombre de ces déterminations et des polynômes correspondants y s'élève à

$$(n \cdot p) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)} \quad .$$

$$(n \cdot 1) = 1.$$

Ce théorème constitue le fondement principal de la théorie générale des fonctions de LAMÉ qu'on doit à M. HEINE. Dans cette théorie la fonction B n'est pas indépendante de A , car l'on a $B = \frac{1}{4} \frac{dA}{dx}$. M. HEINE fait voir que la détermination du polynôme C dépend d'un système d'équations algébriques de degrés supérieurs et que l'équation finale qu'on obtient en éliminant toutes les inconnues sauf une, est *au plus* du degré $(n.p)$. En outre on voit qu'à chaque détermination de C correspond un polynôme déterminé y du degré n .

Mais on voit moins facilement que le degré de l'équation finale d'où dépend le polynôme C atteint effectivement le degré $(n.p)$. M. HEINE a levé cette difficulté en faisant voir par un calcul de proche en proche que, même en soumettant les polynômes A et B à certaines conditions particulières, il existe effectivement $(n.p)$ polynômes du degré n qui satisfont à une équation différentielle de la forme (1).

Je me propose de démontrer, dans ce qui suit, la proposition suivante. Lorsque les racines $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ de l'équation $A = 0$ sont réelles et inégales et qu'en posant:

$$(2) \quad \frac{B}{A} = \frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \dots + \frac{\alpha_p}{x - a_p}$$

les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont positives, alors les $(n.p)$ déterminations du polynôme C sont toutes réelles ainsi que les polynômes correspondants y du degré n . Soit y_1 un de ces derniers polynômes, les racines de $y_1 = 0$ sont réelles et inégales et distribuées dans les p intervalles des racines de $A = 0$.

Le nombre des manières dont on peut distribuer n quantités dans p intervalles est évidemment égal à $(n.p)$ — et j'ajoute maintenant que les racines des polynômes y représentent en effet toutes ces distributions, en sorte qu'un tel polynôme est parfaitement caractérisé par la distribution de ses n racines dans les p intervalles des racines a_0, a_1, \dots, a_p de $A = 0$.

2. Soient, sur un axe OX , $A_0, A_1, A_2, \dots, A_p$ les points dont les abscisses sont a_0, a_1, \dots, a_p et prenons encore, dans un quelconque des p intervalles déterminés par ces points (p. e. $(A_0 - A_1)$), n points X_1, X_2, \dots, X_n dont les abscisses sont x_1, x_2, \dots, x_n . Cela posé,

considérons l'expression suivante, où l'on considère seulement les valeurs absolues des distances des divers points:

$$\Pi = \left[\begin{array}{c} [A_0 X_1 \times A_0 X_2 \times A_0 X_3 \dots A_0 X_n]^{a_0} \\ \times [A_1 X_1 \times A_1 X_2 \times A_1 X_3 \dots A_1 X_n]^{a_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \times [A_p X_1 \times A_p X_2 \times A_p X_3 \dots A_p X_n]^{a_p} \\ \times X_1 X_2 \times X_1 X_3 \times X_1 X_4 \dots \times X_1 X_n \\ \times X_2 X_3 \times X_2 X_4 \dots \times X_2 X_n \\ \times X_3 X_4 \dots \times X_3 X_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \times X_{n-1} X_n \end{array} \right]$$

Cette expression est toujours positive et s'évanouit seulement quand deux des points X_1, X_2, \dots, X_n coïncident ou lorsqu'un de ces points vient se confondre avec l'une des limites de l'intervalle $(A_0 - A_1)$. En considérant les points X_1, X_2, \dots, X_n comme variables, mais restant toujours dans l'intervalle $A_0 - A_1$, il est évident que les divers facteurs de l'expression Π restent compris entre certaines limites, et les exposants $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ étant positifs, on voit que Π reste toujours inférieur à une certaine limite. Par conséquent, pour une certaine position des points X_1, X_2, \dots, X_n l'expression Π devient *maximum*.

On peut interpréter cela de la manière suivante. Concevons que les points fixes A_0, \dots, A_p soient des points matériels, la masse de A_k étant α_k , et que de même les points mobiles (sur $\circ X$) X_1, X_2, \dots, X_n soient des points matériels dont la masse soit égale à l'unité. Alors, si deux points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses, et en raison inverse de leur distance, $\log \Pi$ est le potentiel, et le maximum de Π correspond à une position d'équilibre stable.

Mais pour une position d'équilibre, dont l'existence résulte de ce qui précède (et qui est unique comme on le verra plus loin), on doit avoir:

$$(3) \quad \frac{a_0}{x_k - a_0} + \frac{a_1}{x_k - a_1} + \dots + \frac{a_p}{x_k - a_p} + \frac{1}{x_k - x_1} + \dots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_l - x_{l+1}} + \dots + \frac{1}{x_l - x_n} = O, \quad (l = 1, 2, 3, \dots, n)$$

J'observe maintenant qu'on a d'après (2):

$$\frac{a_0}{x_k - a_0} + \frac{a_1}{x_k - a_1} + \dots + \frac{a_p}{x_k - a_p} = \frac{B(x_k)}{A(x_k)}$$

et en posant:

$$(4) \quad y = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

il vient:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x - x_k} + \dots + \frac{1}{x - x_{k-1}} + \frac{1}{x - x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$$

d'où

$$\left(\frac{2y''}{y'} \right)_{x=x_k} = \frac{1}{x_k - x_1} + \dots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x_k - x_n}.$$

On voit donc que les conditions d'équilibre (3) reviennent à ce que l'expression:

$$\frac{y''}{2y'} + \frac{B}{A}$$

on encore $Ay'' + 2By'$ s'évanouit pour $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Le polynôme $Ay'' + 2By'$ du degré $n + p - 1$ est donc divisible par y et en désignant le quotient par $-C$ on a:

$$Ay'' + 2By' + Cy = 0.$$

Le polynôme y du degré n défini par la relation (4) est donc un de ceux dont l'existence fait l'objet de la proposition de M. HEINE.

Il est clair que s'il existait une seconde position d'équilibre, n'importe que cet équilibre fût stable ou non, on en déduirait aussitôt un autre polynôme y qui satisfait à une équation différentielle telle que (1).

3. Dans ce qui précède nous avons supposé que les points X_1, X_2, \dots, X_n étaient renfermés dans l'intervalle $(A_0 - A_1)$. Mais il est clair qu'en se donnant à priori une distribution quelconque de ces points dans les p intervalles, et en limitant la variabilité de ces points par la condition qu'ils doivent rester toujours dans les intervalles où ils se trouvent d'abord, on peut répéter mot à mot les raisonnements précédents et il existe donc (n, p) polynômes du degré n différents qui satisfont à une équation de la forme (1).

Les polynômes correspondants C sont aussi différents; en effet on aurait autrement une équation de la forme (1) dont les deux intégrales seraient des polynômes y_1, y_2 ce qui est impossible parce qu'on en déduirait la relation absurde:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{Const. } e^{-\int \frac{2b}{A} dx} = \text{Const. } (x - a_0)^{-2a_0} (x - a_1)^{-2a_1} \dots (x - a_p)^{-2a_p}.$$

Nous voyons maintenant aussi qu'en se donnant la distribution des racines x_1, \dots, x_n dans les p intervalles il y a seulement une position d'équilibre et cet équilibre correspondant au maximum du potentiel est stable.

En effet d'après les recherches de M. HEINE le nombre des polynômes y ne peut surpasser (n, p) .

4. Considérons maintenant plus particulièrement les fonctions de LAMÉ, dont voici la définition d'après M. HEINE.

Soit

$$\phi(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_p)$$

alors la fonction de LAMÉ de l'ordre p et du degré n est une fonction entière du degré n des quantités:

$$A_0 = \sqrt{x - a_0}, \quad A_1 = \sqrt{x - a_1}, \quad \dots, \quad A_p = \sqrt{x - a_p}$$

qui satisfait à une équation différentielle de la forme:

$$\phi(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \phi'(x) \frac{dy}{dx} + \theta(x) y = 0$$

où $\theta(x)$ est un polynôme en x du degré $p - 1$.

Ces fonctions se distribuent en classes de la manière suivante.

Soit $\phi_1(x)$ un diviseur quelconque de $\phi(x)$, alors on considère comme appartenant à la même classe toutes les fonctions qui sont de la forme:

$$\sqrt{\phi_1(x)} V(x) \quad .$$

$V(x)$ étant un polynôme en x . Naturellement le degré de $\phi_1(x)$ doit être de même parité que n .

L'équation différentielle à laquelle satisfait le polynôme $V(x)$ devient:

$$\phi(x) \frac{d^2 V}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} \phi'(x) + \frac{\phi(x) \phi_1'(x)}{\phi_1(x)} \right) \frac{dV}{dx} + \eta(x) V = 0;$$

elle est de la forme (1). En supposant réelles et inégales les quantités a_0, a_1, \dots, a_p , notre proposition devient applicable; on a en effet:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi_1'(x)}{\phi_1(x)}$$

en sorte que les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ n'ont d'autres valeurs que $\frac{1}{4}$ et

$\frac{3}{4}$. Le degré de V étant k , les (k, p) fonctions appartenant à la même classe sont donc réelles, et les racines des diverses équations $V = 0$ se trouvent distribuées de toutes les manières possibles dans les p intervalles des racines de l'équation $\phi(x) = 0$.

On doit ce dernier théorème à M. F. KLEIN (Mathematische Annalen, T. XVIII). La démonstration de M. KLEIN n'a rien de commun avec les considérations qui précèdent, et ne s'applique pas à notre proposition plus générale.

Leyde, Novembre 1884.

EINE BEMERKUNG ÜBER DIVISORENSUMMEN

VON

M. A. STERN

in BERN.

Die Formel, welche Herr ZELLER in den *Acta mathematica* Band 4, p. 415 bekannt gemacht hat, beruht auf den zwei bekannten Gleichungen

$$(A) \quad 1 + (1)x + (2)x^2 \dots + (n-1)x^{n-1} \dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots}$$

und

$$(B) \quad \int 1 + \int 2.x \dots + \int n.x^{n-1} \dots = \frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 \dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots}.$$

Indem man die zweite Gleichung durch die erste dividirt erhält man

$$\begin{aligned} & \int 1 + \int 2.x \dots + \int n.x^{n-1} + \dots \\ &= [1 + (1)x + (2)x^2 \dots + (n-1)x^{n-1} \dots][1 + 2x - 5x^4 \dots] \end{aligned}$$

woraus sich die ZELLER'sche Formel

$$\int n = 1(n-1) + 2(n-2) \dots$$

unmittelbar ergibt. Nach EULER's Formel

$$(B') \quad \int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) \dots$$

kann man also auch schreiben

$$(C) \quad \int(n-1) + \int(n-2) \dots = 1(n-1) + 2(n-2) \dots$$

Hier bedeutet (n) die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur Summe n aus den Elementen $1, 2, \dots, n$ und die Formel (C) giebt einen Zusammenhang zwischen diesen Combinationen und der Summe der Divisoren. Einen anderen solchen Zusammenhang habe ich schon früher in dem CRELLE'schen Journal für die Mathematik Band 21, p. 183 abgeleitet.

Man kann aber auch eine der Formel (C) ganz analoge Formel finden, welche einen Zusammenhang zwischen der Summe der Divisoren und der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung angiebt. Bezeichnet man durch $N(n)$ die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zur Summe n aus den Elementen $1, 2, \dots, n$, so hat man

$$1 + N(1)x + N(2)x^2 \dots + N(n)x^n + \dots = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

wofür man

$$1 + N(1)x + N(2)x^2 \dots + N(n)x^n + \dots = \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

schreiben kann. Aus der Verbindung dieser letzten Gleichung mit der Gleichung (B) folgt

$$\begin{aligned} & (\int 1 + \int 2.x \dots + \int n.x^{n-1} \dots)(1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14} \dots) \\ & = (1 + N(1)x + N(2)x^2 + \dots)(1+2x-5x^4-7x^6 \dots) \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad & \int n - \int(n-2) - \int(n-4) + \int(n-10) + \int(n-14) \dots \\ & = N(n-1) + 2N(n-2) - 5N(n-5) - 7N(n-7) \dots \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass nun $\int(n-n)$ den Werth Null hat und nicht, wie in (C), den Werth n ; statt $N(n-n)$ ist die Einheit zu nehmen. Setzt man in (D) statt $\int n$ seinen Werth aus (B) so folgt

$$\begin{aligned} & N(n-1) + 2N(n-2) - 5N(n-5) \dots \\ & = \int(n-1) - \int(n-4) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) \dots \\ & + \int(n-2.5) + \int(n-2.7) - \int(n-2.12) - \int(n-2.15) \dots \end{aligned}$$

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

H. WEBER

in MARBURG.

Die vorliegende Abhandlung verfolgt in ihren ersten Theilen den Zweck, die Transformationstheorie der elliptischen Functionen im Zusammenhang darzustellen und zu den Anwendungen auf Zahlentheorie, so weit sie mit der Theorie der complexen Multiplication zusammenhängen, vorzubereiten, von welchen im letzten Abschnitt ein Theil durchgeführt ist. Ich hoffe diesen ersten Untersuchungen weitergehende folgen lassen zu können. Als der kürzeste und einfachste Weg, um zu den Grundlagen der doppelt periodischen Functionen zu gelangen ist der von JACOBI herrührende, welcher von den θ -Functionen ausgeht, gewählt, und zwar in der Weise, dass nur von den Reihenentwicklungen, nicht von den Productdarstellungen Gebrauch gemacht ist. Es ergeben sich zwar bekanntlich manche Sätze leichter aus den Darstellungen durch unendliche Producte; aber im Interesse einer einheitlichen Darstellung haben wir es vorgezogen nur von den Reihenentwicklungen Gebrauch zu machen, welche allein einer Verallgemeinerung für mehrere Variable fähig sind. Überdies hat es ein eigentümliches Interesse, auch die etwas tiefer liegenden Sätze bei den θ -Reihen direct aufzusuchen, worauf HERMITE an verschiedenen Stellen hingewiesen hat.

Was die Transformationstheorie betrifft, so ergiebt sich dieselbe als eine notwendige Consequenz aus der Teilungsaufgabe, wenn man letztere nach GALOIS'schen Principien auffasst; zugleich gelangt man so am natürlichsten und einfachsten zu den verschiedenen in der Transformationstheorie auftretenden algebraischen Gleichungen.

Bei den zahlentheoretischen Anwendungen, welche den Gegenstand des letzten Abschnitts bilden, haben wir es uns zum Grundsatz gemacht, nur solche Teile aus der Theorie der quadratischen Formen vorauszusetzen, welche zu den elementaren gerechnet werden können, und einige tiefer liegende Sätze, bis jetzt die Sätze über die Verhältnisse der Classenzahlen in den verschiedenen Ordnungen und über die Anzahl der zu einer Determinante gehörigen Geschlechter, freilich nur für negative Determinanten, als zahlentheoretischen Ausdruck für gewisse algebraische Eigenschaften der bei der complexen Multiplication auftretenden Gleichungen aufzufassen.

Marburg im September 1884.

I. Abschnitt.

§ 1. Die Theta-Functionen m^{ter} Ordnung.

Wir definiren als Theta-Function m^{ter} Ordnung der zwei Argumente u, ω eine Function $\theta(u, \omega)$ oder $\theta(u)$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

I. $\theta(u)$ hat, als Function der Variablen u aufgefasst, für alle endlichen Werthe von u den Character einer ganzen rationalen Function.

II. Es ist

$$\theta(u + 1) = (-1)^g \theta(u)$$

$$\theta(u + \omega) = (-1)^h e^{-\pi i m(2u + \omega)} \theta(u).$$

Der Zahlencomplex (g, h) , der aus den Elementen 0, 1 gebildet werden kann, heisst die *Charakteristik* der θ -Function, und wird als Index an das Zeichen θ angehängt: $[\theta_{g,h}(u)]$. Es giebt also nur vier wesentlich verschiedene Charakteristiken, (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), von denen die drei ersten *gerade*, die letzte *ungerade* genannt wird. Wir betrachten hier, um uns kürzer ausdrücken zu können, u als veränderlich, ω als einen

constanten Parameter, von dem ein *positiver imaginärer* Teil vorausgesetzt wird.

Wir stellen nun die complexe Variable u in einer Ebene dar und begrenzen in derselben, von einem beliebigen Punkt u_0 ausgehend, ein Parallelogramm, dessen Ecken in den Punkten u_0 , $u_0 + 1$, $u_0 + \omega$, $u_0 + \omega + 1$ liegen, welches wir das *Periodenparallelogramm* nennen. Die ganze u -Ebene lässt sich durch solche, an den Seiten angrenzende, congruente Parallelogramme ausfüllen, und einem Nullpunkte einer θ -Function entsprechen andere Nullpunkte an congruent liegenden Stellen in allen diesen Parallelogrammen.

Man erhält nun für diese Nullpunkte zwei fundamentale Sätze durch Betrachtung der beiden über die Begrenzung eines Periodenparallelogramms ausgedehnten Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \log \theta_{g,h}(u), \quad \frac{1}{2\pi i} \int u d \log \theta_{g,h}(u)$$

von welchen das erste bekanntlich die Anzahl, das zweite die Summe der u -Werte, für welche $\theta_{g,h}(u)$ im Innern des Parallelogramms verschwindet, darstellt. Die Anzahl dieser Nullwerte ergibt sich darnach $= m$ und ihre Summe gleich

$$(1) \quad \frac{1}{2} m(\omega + 1) + \left(M + \frac{1}{2} g\right) \omega + \left(N + \frac{1}{2} h\right),$$

wenn M , N ganze Zahlen sind. Nullpunkte höherer Ordnung werden dabei nach Massgabe ihrer Vielfachheit, mehrfach gezählt.

III. Eine θ -Function m^{ter} Ordnung hat also innerhalb eines Periodenparallelogramms m Nullpunkte, und von diesen ist einer durch die $m - 1$ übrigen bestimmt.

Hat man mehrere θ -Functionen der gleichen Ordnung und Charakteristik, so ist jede lineare homogene Function derselben mit constanten Coefficienten wieder eine solche Function, und darnach folgt unmittelbar aus dem letzten Satz:

IV. Jede θ -Function von der Ordnung m und gegebener Charakteristik ist eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von höchstens m solchen Functionen, welche linear unabhängig sind.

Ferner ergibt sich noch aus der Definition I, II der folgende Satz in welchem unter der Summe mehrerer Charakteristiken $(g, h), (g', h'), \dots$ die Charakteristik $(g + g' + \dots, h + h' + \dots)$ verstanden ist.

V. *Das Product mehrerer θ -Functionen von beliebiger Ordnung und Charakteristik ist eine θ -Function, deren Ordnung und Charakteristik die Summe der Ordnungen und Charakteristiken der einzelnen Factoren ist.*

§ 2. Die Theta-Functionen der ersten Ordnung.

Für die erste Ordnung existirt nach dem Vorstehenden nur je eine θ -Function, deren Nullpunkte durch die Formel (1) vollständig bestimmt sind. Hiernach kann man sofort zur Darstellung dieser Functionen durch unendliche Producte übergehen, oder man kann aus der Definition I, II durch die Methode der unbestimmten Coefficienten unendliche Reihen für dieselben finden, und dadurch die wirkliche Existenz der gesuchten Functionen nachweisen. Wir wählen den letzteren Weg und erhalten:

$$(1) \quad \theta_{g,h}(u, \omega) = (-i)^{gh} \sum_{-\infty, \alpha}^n (-1)^{h\alpha} e^{\pi i \alpha \left(u + \frac{g}{2}\right)^2 + 2\pi i \alpha \left(u + \frac{g}{2}\right)}$$

indem über einen von ω allein abhängigen Factor, den die Definition I, II unbestimmt lässt, so verfügt ist, dass diese Functionen alle, nebst ihren nach u und ω genommenen Derivierten der partiellen Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta}{\partial \omega}$$

genügen, und dass für $q = 0$

$$(3) \quad \theta_{00}(u) = 1, \quad \theta_{01}(u) = 1, \quad \theta_{10}(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi u, \quad \theta_{11}(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi u$$

wird. Die Function $\theta_{11}(u)$ ist eine *ungerade Function*, während $\theta_{00}(u)$, $\theta_{01}(u)$, $\theta_{10}(u)$ *gerade Functionen* sind.

Jede dieser vier Functionen lässt sich durch jede andere ausdrücken
vermittelt der Relationen

$$(4) \quad \vartheta_{g,h}\left(u + \frac{h' + g'\omega}{2}\right) = (-1)^{gh'} i^{g'(h+h')} e^{-\frac{\pi i \omega g'^2}{4} - \pi i g'} \vartheta_{g+g', h+h'}(u)$$

$$\vartheta_{g+2,h}(u) = \vartheta_{g,h}(u), \quad \vartheta_{g,h+2}(u) = (-1)^g \vartheta_{g,h}(u).$$

Setzt man in diesen Formeln $u = 0$, so erhält man, wenn man die ϑ -Functionen, in welche das Argument den Wert 0 hat, ohne Argument schreibt:

$$(5) \quad \begin{aligned} \vartheta_{00}(0) &= \vartheta_{00}, & \vartheta_{10}(0) &= \vartheta_{10} \\ \vartheta_{00}\left(\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_{01}, & \vartheta_{10}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \vartheta_{00}\left(\frac{1}{2}\omega\right) &= e^{-\frac{\pi i \omega}{4}} \vartheta_{10}, & \vartheta_{10}\left(\frac{1}{2}\omega\right) &= e^{-\frac{\pi i \omega}{4}} \vartheta_{00} \\ \vartheta_{00}\left(\frac{1+\omega}{2}\right) &= 0, & \vartheta_{10}\left(\frac{1+\omega}{2}\right) &= -ie^{-\frac{\pi i \omega}{4}} \vartheta_{01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{01}(0) &= \vartheta_{01}, & \vartheta_{11}(0) &= 0 \\ \vartheta_{01}\left(\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_{00}, & \vartheta_{11}\left(\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_{10} \\ \vartheta_{01}\left(\frac{1}{2}\omega\right) &= 0, & \vartheta_{11}\left(\frac{1}{2}\omega\right) &= ie^{-\frac{\pi i \omega}{4}} \vartheta_{01} \\ \vartheta_{01}\left(\frac{1+\omega}{2}\right) &= e^{-\frac{\pi i \omega}{4}} \vartheta_{10}, & \vartheta_{11}\left(\frac{1+\omega}{2}\right) &= e^{-\frac{\pi i \omega}{4}} \vartheta_{00}. \end{aligned}$$

Da die Quadrate der vier ϑ -Functionen von der zweiten Ordnung sind mit der Charakteristik (0, 0), so kann man zwei von ihnen linear durch die beiden andern ausdrücken und zwar wie folgt:

$$(6) \quad \begin{aligned} \vartheta_{01}^2 \vartheta_{10}^2(u) &= \vartheta_{10}^2 \vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{00}^2 \vartheta_{11}^2(u) \\ \vartheta_{01}^2 \vartheta_{00}^2(u) &= \vartheta_{00}^2 \vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{10}^2 \vartheta_{11}^2(u) \end{aligned}$$

woraus noch, durch $u = \frac{1}{2}$, die Relation sich ergibt:

$$(7) \quad \vartheta_{00}^4 = \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{10}^4.$$

Aus diesen Functionen kann man nun alle θ -Functionen von beliebiger Ordnung und Charakteristik zusammensetzen, wie man auf Grund der Sätze des vorigen § unmittelbar durch die Abzählung der Constanten findet, mit Rücksicht darauf, dass eine lineare Relation zwischen geraden und ungeraden Functionen nur dann bestehen kann, wenn der gerade Teil für sich und der ungerade Teil für sich verschwindet, und dass zwei der Functionen $\vartheta_{g,h}(u)$ nicht in constantem Verhältniss stehen.

Bezeichnen wir mit θ_0, θ_1 irgend zwei von den Functionen $\vartheta_{g,h}(u)^2$, oder auch zwei lineare Combinationen derselben, und mit $F^\nu(\theta_0, \theta_1)$ eine ganze rationale und homogene Function ν^{ter} Ordnung der beiden Argumente θ_0, θ_1 , so erhalten wir auf dem angegebenen Weg folgende Darstellungen.

I. $m \equiv 0 \pmod{2}$, *gerade Functionen*

$$\theta_{00}^{(m)}(u) = F^{\left(\frac{1}{2}m\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{01}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u)\vartheta_{01}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-1\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{10}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u)\vartheta_{10}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-1\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{11}^{(m)}(u) = \vartheta_{10}(u)\vartheta_{01}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-1\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

ungerade Functionen

$$\theta_{00}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u)\vartheta_{01}(u)\vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-2\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{01}^{(m)}(u) = \vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-1\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{10}^{(m)}(u) = \vartheta_{01}(u)\vartheta_{11}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-1\right)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{11}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u)\vartheta_{11}(u)F^{\left(\frac{1}{2}m-1\right)}(\theta_0, \theta_1).$$

II. $m \equiv 1 \pmod{2}$, *gerade Functionen*

$$\theta_{00}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u) F^{\frac{1}{2}(m-1)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{01}^{(m)}(u) = \vartheta_{01}(u) F^{\frac{1}{2}(m-1)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{10}^{(m)}(u) = \vartheta_{10}(u) F^{\frac{1}{2}(m-1)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{11}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u) \vartheta_{01}(u) \vartheta_{10}(u) F^{\frac{1}{2}(m-3)}(\theta_0, \theta_1).$$

ungerade Functionen

$$\theta_{00}^{(m)}(u) = \vartheta_{01}(u) \vartheta_{10}(u) \vartheta_{11}(u) F^{\frac{1}{2}(m-3)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{01}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u) \vartheta_{10}(u) \vartheta_{11}(u) F^{\frac{1}{2}(m-3)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{10}^{(m)}(u) = \vartheta_{00}(u) \vartheta_{01}(u) \vartheta_{11}(u) F^{\frac{1}{2}(m-3)}(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_{11}^{(m)}(u) = \vartheta_{11}(u) F^{\frac{1}{2}(m-1)}(\theta_0, \theta_1).$$

Hierdurch ist die in § 1 als Maximalzahl gefundene Anzahl der θ -Functionen als wirklich existirend nachgewiesen, oder, mit andern Worten, es ist gezeigt, dass man stets eine θ -Function *m-ter* Ordnung von gegebener Charakteristik so bestimmen kann, dass sie in $m - 1$ beliebig gegebenen Punkten eines Periodenparallelogramms verschwindet. Durch diese Nullpunkte ist dann aber auch, von einem constanten Factor abgesehen, die θ -Function ausnahmslos eindeutig bestimmt.

§ 3. *Die Theta-Functionen zweiter Ordnung.*

Zu den θ -Functionen der zweiten Ordnung gehören auch die vier Functionen $\vartheta_{g,h}(2u, 2\omega)$, und zwar ist ihre Charakteristik $(0, h)$; man kann sie daher, da man ihre Nullpunkte kennt, durch die Functionen

$\vartheta_{g,h}(u)$ ausdrücken und erhält, wenn man einen von u unabhängigen Coefficienten durch die Bedingungen (2), (3) bestimmt, die Formeln: LAN-
DEN'sche Transformation)

$$\begin{aligned} 2\vartheta_{10}(0, 2\omega)\vartheta_{00}(2u, 2\omega) &= \vartheta_{10}(u)^2 + \vartheta_{11}(u)^2 \\ 2\vartheta_{00}(0, 2\omega)\vartheta_{10}(2u, 2\omega) &= \vartheta_{10}(u)^2 - \vartheta_{11}(u)^2 \\ \vartheta_{01}(0, 2\omega)\vartheta_{01}(2u, 2\omega) &= \vartheta_{00}(u)\vartheta_{01}(u) \\ \vartheta_{01}(0, 2\omega)\vartheta_{11}(2u, 2\omega) &= \vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u).^{(1)} \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Differentiation nach der Variablen u durch einen Accent, so erhält man für $u = 0$ aus den vorstehenden Formeln:

$$\begin{aligned} 2\vartheta_{10}(0, 2\omega)\vartheta_{00}(0, 2\omega) &= \vartheta_{10}^2 \\ \vartheta_{01}(0, 2\omega)^2 &= \vartheta_{00}\vartheta_{01} \\ 2\vartheta_{01}(0, 2\omega)\vartheta'_{11}(0, 2\omega) &= \vartheta_{10}\vartheta'_{11} \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(3) \quad \frac{\vartheta'_{11}(0, 2\omega)}{\vartheta_{00}(0, 2\omega)\vartheta_{01}(0, 2\omega)\vartheta_{10}(0, 2\omega)} = \frac{\vartheta'_{11}}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}}$$

woraus hervorgeht, dass die auf der rechten Seite stehende Function von ω ungeändert bleibt, wenn ω in 2ω verwandelt wird, so dass man den Wert derselben erhält, wenn man $\omega = \infty$, d. h. $q = 0$ setzt.

Man findet so aus (3) § 2 die bekannte und wichtige Formel

$$(4) \quad \vartheta'_{11} = \pi\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}.$$

(¹) Am einfachsten leitet man zuerst mittelst (2), (3) die dritte und vierte der Formeln (1) her. Die beiden ersten folgen dann leicht aus (6) § 2.

Noch weitere Folgerungen lassen sich aus (1), (2) ziehen, wenn man ω durch $\frac{1}{2}\omega$ und u durch 0 und $\frac{1}{4}$ ersetzt. Man erhält so

$$\begin{aligned}\sqrt{\vartheta_{00}\vartheta_{01}} &= \vartheta_{01}(0, 2\omega) = \sum_{-\infty, \infty}^n (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \\ \sqrt{\vartheta_{00}\vartheta_{10}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_{10}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2} q^{\frac{1}{8}} \sum_{0, \infty}^n q^{\frac{n \cdot n+1}{2}} \\ \sqrt{\vartheta_{10}\vartheta_{01}} &= \vartheta_{10}\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2} q^{\frac{1}{8}} \sum_{0, \infty}^n (-q)^{\frac{n \cdot n+1}{2}},\end{aligned}$$

wodurch diese Quadratwurzeln als *eindeutige* Functionen von ω dargestellt sind. Man erhält daraus noch die nach HERMITE mit $\varphi(\omega)$ und $\phi(\omega)$ zu bezeichnenden Quotienten

$$\begin{aligned}(6) \quad \varphi(\omega) &= \sqrt{\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}} = \sqrt{2} q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum_{0, \infty}^n (-q)^{\frac{n \cdot n+1}{2}}}{\sum_{-\infty, \infty}^n (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}} \\ \phi(\omega) &= \sqrt{\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}} = \frac{\sum_{0, \infty}^n (-q)^{\frac{n \cdot n+1}{2}}}{\sum_{0, \infty}^n q^{\frac{n \cdot n+1}{2}}} \cdot (1)\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise wie das Formelsystem (1) lässt sich auch das folgende, der GAUSS'schen Transformation entsprechende System herleiten:

$$\begin{aligned}(7) \quad \vartheta_{01}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \vartheta_{00}\left(u, \frac{\omega}{2}\right) &= \vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{11}^2(u) \\ \vartheta_{01}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \vartheta_{01}\left(u, \frac{\omega}{2}\right) &= \vartheta_{00}^2(u) - \vartheta_{10}^2(u) \\ \vartheta_{10}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \vartheta_{10}\left(u, \frac{\omega}{2}\right) &= 2\vartheta_{10}(u)\vartheta_{00}(u) \\ \vartheta_{10}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \vartheta_{11}\left(u, \frac{\omega}{2}\right) &= 2\vartheta_{11}(u)\vartheta_{01}(u).\end{aligned}$$

(1) HERMITE, Comptes rendus, tome LVII, 21 déc. 1863.

§ 4. Die Functionen $\vartheta_{g,h}(nu, n\omega)$ und die Function $\eta(\omega)$.

Die Functionen $\vartheta_{g,h}(nu, n\omega)$ sind θ -Functionen n^{ter} Ordnung, und zwar, wenn n ungerade vorausgesetzt wird, von der Charakteristik (g, h) . Durch Berücksichtigung der Nullpunkte erhält man für dieselben folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \vartheta_{11}(nu, n\omega) &= C \vartheta_{11}(u) \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{11}\left(u + \frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{11}\left(u - \frac{2\nu}{n}\right) \\ \vartheta_{10}(nu, n\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} C \vartheta_{10}(u) \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{10}\left(u + \frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{10}\left(u - \frac{2\nu}{n}\right) \\ \vartheta_{01}(nu, n\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} C \vartheta_{01}(u) \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{01}\left(u + \frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{01}\left(u - \frac{2\nu}{n}\right) \\ \vartheta_{00}(nu, n\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} C \vartheta_{00}(u) \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{00}\left(u + \frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{00}\left(u - \frac{2\nu}{n}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

und für die Constante C ergibt sich mittelst der Formel (4) § 3

$$C = \frac{\pm 1}{\sqrt{n}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{2\nu}{n}\right)}{\vartheta_{00}\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{01}\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{10}\left(\frac{2\nu}{n}\right)}.$$

Nun lässt sich aber durch die Formel (1), (7) des vorigen § leicht zeigen, dass

$$\frac{\prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{00}\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{10}\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_{01}\left(\frac{2\nu}{n}\right)}{\vartheta_{00}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{10}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{01}^{\frac{n-1}{2}}}$$

wenigstens vom Zeichen abgesehen, ungeändert bleibt, wenn ω durch 2ω

ersetzt wird. Man kann also den Wert dieses Quotienten dadurch ermitteln, dass man $q = 0$ setzt, und erhält so die Formel

$$(2) \quad 2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{00} \left(\frac{2\nu}{n} \right) \vartheta_{10} \left(\frac{2\nu}{n} \right) \vartheta_{01} \left(\frac{2\nu}{n} \right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \vartheta_{00}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{10}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{01}^{\frac{n-1}{2}}.$$

Hieraus ergibt sich, indem man in (1) das Vorzeichen wieder durch $q = 0$ bestimmt:

$$(3) \quad \sqrt[n]{\vartheta_{11}(n\omega, n\omega)} \vartheta_{00}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{10}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{01}^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_{11}(n) \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{11} \left(\frac{2\nu}{n} \right) \vartheta_{11} \left(\frac{2\nu}{n} + n \right) \vartheta_{11} \left(\frac{2\nu}{n} - n \right)$$

aus welcher man die drei andern Formeln leicht ableitet.

Wir wenden die letzte Formel auf den Fall $n = 3$ an, für welchen wir erhalten, wenn wir n, ω durch $0, \frac{1}{3}\omega$ ersetzen und (4) § 3 anwenden:

$$(4) \quad 3\sqrt[3]{\vartheta_{11}'} = 2\pi \left[\vartheta_{11} \left(\frac{2}{3}, \frac{\omega}{3} \right) \right]^3,$$

wonach die dritte Wurzel aus ϑ_{11}' als eindeutige Function von ω dargestellt werden kann. Man setze

$$(5) \quad \eta(\omega) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \vartheta_{11} \left(\frac{2}{3}, \frac{\omega}{3} \right) = q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty, \infty}^n (-1)^n q^{\frac{1}{2}n^2 + n}$$

und erhält:

$$(6) \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} \vartheta_{00} \vartheta_{01} \vartheta_{10}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi} \vartheta_{11}'} = \eta(\omega).$$

Die Function $\eta(\omega)$, verschwindet, wie aus (6) hervorgeht, für keinen endlichen Wert von ω mit positiv imaginärem Teil, und ist für rein imaginäre Werte von ω reell und positiv. Die Gleichung (3) ergibt:

$$(7) \quad \sqrt[n]{\eta(n\omega)} \eta(\omega)^{\frac{n-3}{2}} = \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\nu} \vartheta_{11} \left(\frac{2\nu}{n} \right).$$

Man schliesst ferner aus den Formeln (2) des vorigen §, wenn man beachtet dass

$$\vartheta_{00}(\omega, \omega + 1) = \vartheta_{01}, \quad \eta(\omega + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\omega)$$

$$\vartheta_{10} \eta(\omega) = 2 \eta(2\omega)^2$$

$$(8) \quad \vartheta_{01} \eta(\omega) = \eta\left(\frac{\omega}{2}\right)^2$$

$$e^{\frac{\pi i}{12}} \vartheta_{00} \eta(\omega) = \eta\left(\frac{1 + \omega}{2}\right)^2.$$

Führt man noch die drei Functionen ein:

$$(9) \quad \eta(2\omega) = \eta_1(\omega), \quad \eta\left(\frac{\omega}{2}\right) = \eta_2(\omega), \quad \eta\left(\frac{1 + \omega}{2}\right) = \eta_3(\omega),$$

so lassen sich durch diese die HERMIT'schen Functionen φ , ψ , χ folgendermassen darstellen:

$$\varphi(\omega) = e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt[3]{2} \frac{\eta_1(\omega)}{\eta_3(\omega)}$$

$$\psi(\omega) = e^{\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta_2(\omega)}{\eta_3(\omega)}$$

$$\chi(\omega) = \sqrt[3]{\varphi(\omega)\psi(\omega)} = e^{\frac{\pi i}{24}} \sqrt[3]{2} \frac{\eta(\omega)}{\eta_3(\omega)}. \quad (1)$$

§ 5. *Lineare Transformation.*

Bedeutend α , β , γ , δ vier ganze Zahlen, die der Bedingung

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, so lassen sich die ϑ -Functionen mit dem Modul

$$(2) \quad \omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$$

(1) Vgl. DEDEKIND: *Ueber die elliptischen Modulfunctionen*, Journal f. Mathematik. Bd. 83.

und dem Argument

$$(3) \quad u_1 = \frac{u}{\alpha + \beta\omega}$$

durch solche mit dem Modul ω und dem Argument u ausdrücken. Man findet in der That leicht, wenn A einen constanten Factor bedeutet:

$$(4) \quad \begin{aligned} e^{-\pi i \tilde{\gamma} u u_1} \vartheta_{11}(u_1, \omega_1) &= A \vartheta_{11}(u, \omega) \\ e^{-\pi i \tilde{\gamma} u u_1} \vartheta_{10}(u_1, \omega_1) &= i^{\tilde{\gamma}} e^{-\frac{\pi i}{4} \alpha \tilde{\gamma}} A \vartheta_{1+\tilde{\gamma}, 1-\alpha}(u, \omega) \\ e^{-\pi i \tilde{\gamma} u u_1} \vartheta_{01}(u_1, \omega_1) &= i^{\tilde{\gamma}-1} e^{-\frac{\pi i}{4} \gamma \tilde{\gamma}} A \vartheta_{1+\tilde{\gamma}, 1-\gamma}(u, \omega) \\ e^{-\pi i \tilde{\gamma} u u_1} \vartheta_{00}(u_1, \omega_1) &= i^{\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}-\alpha \tilde{\gamma}} e^{-\frac{\pi i}{4} (\alpha \tilde{\gamma} + \gamma \tilde{\gamma})} A \vartheta_{1+\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}, 1-\alpha-\gamma}(u, \omega), \end{aligned}$$

und durch Anwendung der Formel (4) § 3 erhält man eine Bestimmung von A^2 . Es soll hier nur

$$(5) \quad A^4 = (-1)^{\tilde{\beta}\gamma + \alpha\tilde{\gamma} + \gamma\tilde{\gamma}} (\alpha + \beta\omega)^2$$

angeführt werden. Aus der ersten der Formeln (4) folgt dann die Transformation der η -Function:

$$(6) \quad \eta\left(\frac{\gamma + \partial\omega}{\alpha + \beta\omega}\right) = e^{\frac{\pi i \lambda}{12}} \sqrt{-i(u + \beta\omega)} \eta(\omega),$$

worin λ eine nach dem Modul 24 bestimmte Zahl ist, wenn wir festsetzen, dass β positiv sei, und die Quadratwurzel mit positiv reellem Teil zu nehmen ist. Für den besonderen Fall $\beta = 0$ ergibt sich direct:

$$(7) \quad \eta(\omega + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\omega); \quad \eta(\omega + \gamma) = e^{\frac{\pi i}{12}\gamma} \eta(\omega),$$

und ausserdem hat man, wie man aus der Annahme eines rein imaginären ω schliesst:

$$(8) \quad \eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \eta(\omega).$$

Durch wiederholte Anwendung der beiden letzten Formeln lässt sich die allgemeine Formel (6) ableiten. Ist λ bestimmt, so ist auch A bekannt nach der Formel

$$(9) \quad A = -ie^{\frac{\pi i \lambda}{4}} \sqrt{-i(\alpha + \beta \omega)},$$

und den besonderen Fällen (7), (8) entsprechend ergibt sich:

$$\text{I.} \quad \vartheta_{11}(u, \omega + 1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{11}(u, \omega)$$

$$\vartheta_{10}(u, \omega + 1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{10}(u, \omega)$$

$$\vartheta_{01}(u, \omega + 1) = \vartheta_{00}(u, \omega)$$

$$\vartheta_{00}(u, \omega + 1) = \vartheta_{01}(u, \omega).$$

$$\text{II.} \quad e^{-\frac{\pi i u^2}{\omega}} \vartheta_{11}\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = -i \sqrt{-i\omega} \vartheta_{11}(u, \omega)$$

$$e^{-\frac{\pi i u^2}{\omega}} \vartheta_{10}\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \vartheta_{01}(u, \omega)$$

$$e^{-\frac{\pi i u^2}{\omega}} \vartheta_{01}\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \vartheta_{10}(u, \omega)$$

$$e^{-\frac{\pi i u^2}{\omega}} \vartheta_{00}\left(\frac{u}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega} \vartheta_{00}(u, \omega).$$

Vergleicht man (9) mit (5), so folgt:

$$\lambda \equiv \beta r + \alpha \beta + r\delta + 1 \pmod{2}$$

oder:

$$(10) \quad \beta \lambda \equiv \alpha + \delta \pmod{2}.$$

Die Zahl λ , die von den vier der Bedingung (1) genügenden ganzen Zahlen abhängig ist, wird nun mittelst der speziellen Transformationen (7), (8), durch ein recurrentes Verfahren bestimmt. Zunächst erkennt man

leicht aus (7), dass die beiden Verbindungen $\alpha\lambda - \gamma$, $\beta\lambda - \delta$ nur von den beiden *relativen Primzahlen* α , β abhängig sind, und demnach setzen wir mit Rücksicht auf (10)

$$(11) \quad \beta\lambda - \delta - \alpha = -2(\alpha, \beta),$$

worin (α, β) eine von α und β abhängige nach dem Modul 12 bestimmte Zahl ist. Da die gleichzeitige Änderung der Vorzeichen von α , β , γ , δ den Wert von λ nicht ändert, so folgt aus (11)

$$(12) \quad (-\alpha, -\beta) = -(\alpha, \beta); \quad (1, 0) = 1.$$

Da die beiden Functionen

$$\eta\left(\frac{\gamma + \partial\omega}{\alpha + \beta\omega}\right), \quad \eta\left(\frac{\gamma - \partial\omega}{-\alpha + \beta\omega}\right)$$

für rein imaginäre ω conjugirt imaginär sind, so schliesst man aus (6) und (11), (12):

$$(13) \quad (\alpha, \beta) \equiv -(-\alpha, \beta) \equiv (\alpha, -\beta) \pmod{12}.$$

Vertauscht man in (6) α , β , γ , δ mit $-\beta$, α , $-\delta$, γ und bezeichnet den diesem Zahlencomplex entsprechenden Wert von λ mit λ' so ergibt die Anwendung von (8)

$$(14) \quad \lambda' \equiv \lambda \mp 3 \pmod{24},$$

wenn das obere Zeichen für ein positives, das untere für ein negatives α genommen und β positiv vorausgesetzt wird.

Macht man in der Gleichung (11) dieselbe Vertauschung, so ergibt sich nach (14), wenn mit $|\alpha|$ der absolute Wert von α bezeichnet wird:

$$(15) \quad \alpha\lambda - \gamma + \beta - 3|\alpha| \equiv 2(\beta, \alpha) \pmod{24},$$

und aus (11) und (15)

$$(16) \quad \lambda \equiv \delta\{2(\beta, \alpha) - \beta + 3|\alpha|\} + \gamma\{2(\alpha, \beta) - \alpha\} \pmod{24},$$

wodurch die Bestimmung von λ vollständig auf die des Symbols (α, β)

zurückgeführt ist. Für die Berechnung dieses Symbols ergibt sich aber, wenn man in (6) ω durch $\omega + 1$ ersetzt und (7), (8) und (11) anwendet:

$$(17) \quad \begin{aligned} (\alpha', \beta) &\equiv (\alpha, \beta) \pmod{12}, \quad \text{wenn} \quad \alpha' \equiv \alpha \pmod{\beta} \\ (\alpha, 1) &\equiv (0, 1) \equiv 0 \pmod{12}, \end{aligned}$$

und wenn man λ aus (11) und (15) eliminiert:

$$(18) \quad 2\alpha(\alpha, \beta) + 2\beta(\beta, \alpha) \equiv 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 3|\alpha|\beta \pmod{24},$$

wodurch dasselbe völlig bestimmt ist.

Nimmt man in (18) α und β ungerade und positiv an, und vergleicht diese Formel mit der aus dem Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste folgenden

$$(19) \quad 2\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 2\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \equiv (\alpha + 1)(\beta + 1) \pmod{8},$$

so leitet man daraus her

$$(20) \quad \alpha\left\{\left(\alpha, \beta\right) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\beta+1}{2}\right\} + \beta\left\{\left(\beta, \alpha\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\alpha+1}{2}\right\} \equiv 0 \pmod{4}$$

und hieraus schliesst man durch Anwendung des Algorithmus vom grössten gemeinschaftlicher Teiler

$$(21) \quad (\alpha, \beta) \equiv \frac{\beta+1}{2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \pmod{4}$$

eine Formel, die wegen (13) und (17) auch für negative und gerade α gültig bleibt.

Hiernach ergibt sich ohne Schwierigkeiten das Verhalten von (α, β) zu dem Modul 4 auch für ein gerades β aus der Formel (18) und desgleichen für den Modul 3, wodurch das Symbol (α, β) nach dem Modul

12, worauf es allein ankommt, für alle Fälle bestimmt ist. Wir stellen hier das vollständige Formelsystem übersichtlich zusammen.

$$\begin{aligned}
 (0, 1) &\equiv 0, & (1, 0) &\equiv 1 \pmod{12} \\
 (-\alpha, \beta) &\equiv -(\alpha, \beta) \pmod{12} \\
 (\alpha, -\beta) &\equiv (\alpha, \beta) \pmod{12} \\
 (-\alpha, -\beta) &\equiv -(\alpha, \beta) \pmod{12} \\
 (\alpha, \beta) &\equiv \alpha \pmod{3}, & \beta &\equiv 0 \pmod{3} \\
 (22) \quad (\alpha, \beta) &\equiv 0 \pmod{3}, & \beta &\equiv \pm 1 \pmod{3} \\
 (\alpha, \beta) &\equiv \frac{\beta+1}{2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \pmod{4}, & \beta &\equiv 1 \pmod{2}, \beta > 0 \\
 (\alpha, \beta) &\equiv \alpha \pmod{4}, & \beta &\equiv 0 \pmod{8} \\
 (\alpha, \beta) &\equiv -\alpha \pmod{4}, & \beta &\equiv 4 \pmod{8} \\
 (\alpha, \beta) &\equiv 0 \pmod{4}, & \beta &\equiv 2 \pmod{8}, \beta > 0 \\
 (\alpha, \beta) &\equiv 2 \pmod{4}, & \beta &\equiv 6 \pmod{8}, \beta > 0 \\
 \lambda &\equiv \alpha\{2(\beta, \alpha) - \beta + 3|\alpha|\} + r\{2(\alpha, \beta) - \alpha\} \pmod{24}.
 \end{aligned}$$

Das Symbol (α, β) ist von DEDEKIND in die Theorie eingeführt (RIEMANN'S gesammelte Werke, Erläuterungen zu No. XXVII und Journal für Mathematik, Bd. 83, S. 265). Das vollständige Formelsystem (22) welches ich mit seiner Zustimmung hier aufnehme, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung. Das Symbol ist in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen kaum zu entbehren und umfasst alle verwandten specielleren Untersuchungen. So ergeben sich sehr leicht aus den Formeln (10) § 4 die HERMITE'Schen Transformationsformeln für die Functionen $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$, von denen hier nur die folgenden den speciellen Trans-

formationen (7), (8) entsprechenden angeführt sein mögen, aus welchen die übrigen durch wiederholte Anwendung folgen.

$$\begin{aligned}
 \eta_1(\omega + 1) &= e^{\frac{\pi i}{6}} \eta_1(\omega), & \eta_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{\frac{-i\omega}{2}} \eta_2(\omega) \\
 (23) \quad \eta_2(\omega + 1) &= \eta_3(\omega), & \eta_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{-2i\omega} \eta_1(\omega) \\
 \eta_3(\omega + 1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} \eta_2(\omega), & \eta_3\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{-i\omega} \eta_3(\omega).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(\omega + 1) &= e^{\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}, & \varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \psi(\omega) \\
 (24) \quad \psi(\omega + 1) &= \frac{1}{\psi(\omega)}, & \psi\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \varphi(\omega) \\
 \chi(\omega + 1) &= e^{\frac{i\pi}{24}} \frac{\chi(\omega)}{\psi(\omega)}, & \chi\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= \chi(\omega).
 \end{aligned}$$

Wenn man die Formeln (4) für die lineare Transformation auf (2) § 4 anwendet, so ergibt sich die allgemeinere Formel, in welcher α, β irgend zwei relative Primzahlen sind:

$$\begin{aligned}
 (25) \quad 2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^n \vartheta_{00} \left(\frac{2\nu(\alpha + \beta\omega)}{n} \right) \vartheta_{10} \left(\frac{2\nu(\alpha + \beta\omega)}{n} \right) \vartheta_{01} \left(\frac{2\nu(\alpha + \beta\omega)}{n} \right) \\
 = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} e^{\frac{\pi i}{6} \beta(a + \beta\omega) \frac{n^2-1}{n}} \vartheta_{00}^2 \vartheta_{10}^2 \vartheta_{01}^2.
 \end{aligned}$$

Ebenso kann man durch Verbindung mit der linearen Transformation aus (7) § 4 die allgemeine Transformationsformel für

$$\eta\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$$

herleiten, wenn a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, die der Bedingung $ad - bc = n$ genügen. Wählt man nämlich die ganzen Zahlen x, y so dass

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \alpha &= xa + yc \\
 \beta &= xb + yd
 \end{aligned}$$

ohne gemeinsamen Teiler sind,⁽¹⁾ und γ, δ so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist, so lässt sich die Transformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in folgender Weise zusammensetzen

$$(27) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\delta - b\gamma & -y \\ c\delta - d\gamma & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Wenn nun λ, λ' die oben festgesetzte Bedeutung haben für die beiden linearen Transformationen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\delta - b\gamma & -y \\ c\delta - d\gamma & x \end{pmatrix}$$

so folgt unter der Voraussetzung eines positiven β und y

$$(28) \quad \eta\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) \eta(\omega)^{\frac{n-3}{2}} \\ = (-i)^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}(n\lambda + \lambda')} e^{\frac{\pi i \beta (a + \beta \omega)}{6n} \frac{n^2-1}{2}} \sqrt{\frac{a+b\omega}{n}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\infty} \vartheta_{11}\left(\frac{2\nu(a + \beta \omega)}{n}\right)$$

wo die Quadratwurzel mit positivem reellem Teil zu nehmen ist.

⁽¹⁾ Dass ein solches Zahlensystem x, y immer existirt, ist leicht einzusehen; denn ist p irgend eine in n aufgehende Primzahl, so kann man zunächst die beiden Zahlen x_p, y_p so wählen, dass $ax_p + cy_p, bx_p + dy_p$ nicht beide durch p teilbar sind, und wenn man dann $x \equiv x_p, y \equiv y_p \pmod{p}; x \equiv x_{p'}, y \equiv y_{p'} \pmod{p'}, \dots$ setzt, für alle in n aufgehenden Primzahlen p, p', \dots so genügen diese Werte der gestellten Forderung (Vgl. KÖNIGSBERGER, *Ellipt. Functionen*, II, S. 93).

II. Abschnitt.

§ 6. Die elliptischen Functionen.

Die Quotienten zweier θ -Functionen gleicher Ordnung sind doppelt periodische Functionen, und es ergibt sich sehr leicht aus den Sätzen des § 1, dass sich *alle* eindeutigen doppelt periodischen Functionen, welche im Innern eines Periodenparallelogramms in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich in endlicher Ordnung werden, als solche Quotienten darstellen lassen; und da die Differentialquotienten von doppelt periodischen Functionen wieder ebensolche Functionen sind, so kann man auf Grund der oben nachgewiesenen algebraischen Beziehungen zwischen den θ -Functionen algebraische Differentialgleichungen für die doppelt periodischen Functionen erhalten. Wir betrachten als die einfachsten von diesen Functionen die folgenden:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial_{10}} \frac{\partial_{11}(u)}{\partial_{01}(u)} \\ (1) \quad Y &= \frac{\partial_{01}}{\partial_{10}} \frac{\partial_{10}(u)}{\partial_{01}(u)} \\ Z &= \frac{\partial_{11}}{\partial_{10}} \frac{\partial_{01}(u)}{\partial_{00}(u)}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen dieser Functionen nach u sind doppelt periodische Functionen, deren Zähler und Nenner θ -Functionen zweiter Ordnung sind, die sich daher nach § 2 darstellen lassen. Man findet so durch Nullsetzen der Argumente für die Zähler dieser Ableitungen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \partial'_{11}(u) \partial_{01}(u) - \partial'_{01}(u) \partial_{11}(u) &= -\pi \partial_{01}^2 \partial_{00}(u) \partial_{10}(u) \\ (2) \quad \partial'_{10}(u) \partial_{01}(u) - \partial'_{01}(u) \partial_{10}(u) &= -\pi \partial_{00}^2 \partial_{11}(u) \partial_{00}(u) \\ \partial'_{00}(u) \partial_{01}(u) - \partial'_{01}(u) \partial_{00}(u) &= -\pi \partial_{10}^2 \partial_{11}(u) \partial_{10}(u). \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$(3) \quad k = \frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2}, \quad k' = \frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{00}^2}, \quad k^2 + k'^2 = 1$$

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\omega), \quad \sqrt[4]{k'} = \phi(\omega), \quad \sqrt[12]{kk'} = \chi(\omega),$$

so dass

$$(4) \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 + k^2 x^2 = 1$$

wird, und ferner

$$(5) \quad \pi \vartheta_{00}^2 = 2K, \quad \omega K = iK', \quad v = 2Ku,$$

so erhält man für die Functionen x, y, z das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dv} = yz$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dv} = -zx$$

$$\frac{dz}{dv} = -k^2 xy$$

mit den Nebenbedingungen, dass

$$(7) \quad \text{für } v = 0 : x = 0, y = 1, z = 1$$

sei; und dies System ist also durch die Ausdrücke (1) vollständig integrirt. x, y, z heissen die *elliptischen Grundfunctionen* und k der *Modul*. Als Functionen von v und k werden sie mit

$$(8) \quad x = \sin \operatorname{am}(v, k)$$

$$y = \cos \operatorname{am}(v, k)$$

$$z = \Delta \operatorname{am}(v, k)$$

bezeichnet. Da durch die Nebenbedingungen (7) die Lösungen der Differentialgleichungen (6) völlig und eindeutig bestimmt sind, so folgt, dass, wenn zwei verschiedene Werte von ω , ω und ω_1 , zu demselben Werte von k^2 führen, die Functionen

$$\vartheta_{g,h}(u, \omega) \quad \text{und} \quad \vartheta_{g,h}(u_1, \omega_1)$$

wenn

$$\vartheta_{00}^2(\omega, \omega)u = \vartheta_{00}^2(\omega, \omega_1)u_1$$

ist, für dieselben Werte von u verschwinden, und dass in Folge dessen ω und ω_1 in der Verbindung stehen

$$(9) \quad \omega_1 = \frac{2\gamma + \partial\omega}{\alpha + 2\beta\omega}, \quad \alpha\partial - 4\beta\gamma = 1,$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \partial$ ganze Zahlen sind, oder, mit andern Worten, dass die Gleichung

$$\varphi(\omega)^8 = \varphi(\omega_1)^8$$

die Gleichung (9) zur notwendigen Folge hat.⁽¹⁾ Es folgt aber auch umgekehrt aus der linearen Transformation der ϑ -Functionen (§ 5 (4)) dass k^2 immer denselben Wert erhält, sobald ω durch ω_1 ersetzt wird. Allgemeiner ergibt sich aus den erwähnten Formeln, dass, wenn ω durch irgend einen Ausdruck

$$(10) \quad \frac{\gamma + \partial\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad \alpha\partial - \beta\gamma = 1$$

ersetzt wird, k^2 immer in einen der 6 Werte

$$(11) \quad k^2, \quad k'^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{k'^2}, \quad -\frac{k^2}{k'^2}, \quad -\frac{k'^2}{k^2}$$

übergeht, und dass auch umgekehrt, sobald $\varphi(\omega_1)$ einem dieser 6 Werte gleich wird, ω_1 ein Ausdruck von der Form (10) sein muss. Eine symmetrische Function der 6 Grössen (11) hat also die Eigenschaft, un geändert zu bleiben, wenn für ω eine der Substitutionen (10), die wir in üblicher Weise durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \partial \end{pmatrix}$$

bezeichnen, darin ausgeführt wird. Jede solche symmetrische Function

(¹) Vgl. DEDEKIND, Journal f. Mathematik, Bd. 83, S. 266.

ist aber rational ausdrückbar durch die Coëfficienten der rationalen Function 6^{ten} Grades:

$$\begin{aligned} & \left(\xi - k^2 \left(\xi - k'^2 \right) \left(\xi - \frac{1}{k^2} \right) \left(\xi - \frac{1}{k'^2} \right) \left(\xi + \frac{k^2}{k'^2} \right) \left(\xi + \frac{k'^2}{k^2} \right) \right) \\ &= \xi^6 - 3\xi^5 + A\xi^4 - B\xi^3 + A\xi^2 - 3\xi + 1 \end{aligned}$$

zwischen denen die Relation besteht (aus $\xi = 1$)

$$2A - B = 5$$

$$A = 6 - \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4}.$$

Hiernach können wir alle diese symmetrischen Functionen rational ausdrücken durch die eine

$$(12) \quad j(\omega) = 2^8 \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4}$$

welche die *absolute Invariante* des Systems doppelt periodischer Functionen genannt wird.

Nennen wir zwei Zahlen ω, ω_1 *äquivalent* wenn

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist für ganzzahlige $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so hat die Function $j(\omega)$ nach dem obigen die fundamentale Eigenschaft, dass sie für äquivalente Werte von ω und nur für solche denselben Wert erhält.⁽¹⁾

Ausser dieser absoluten Invariante führen wir (nach WEIERSTRASS, vgl. die von H. A. SCHWARZ herausgegebenen *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen*) noch zwei andere einwertige Func-

(¹) Die von DEDEKIND l. c. eingeführte Valenz, $\text{val}(\omega)$ ist nach dieser Bezeichnung $\frac{1}{27.64} j$; dieselbe Bedeutung hat das von KLEIN in seinen Untersuchungen benutzte Zeichen J (Mathematische Annalen, Bd. XIV, S. 112).

tionen g_2, g_3 ein, die wir die Invarianten schlechtweg nennen, und die als eindeutige Functionen von ω folgendermassen definiert sind:

$$(13) \quad \begin{aligned} g_2 &= \frac{4}{3} \frac{1 - k^2 k'^2}{\sqrt[3]{k^4 k'^4}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{4} j} \\ g_3 &= \frac{4}{27} \frac{(2 + k^2 k'^2)(k'^2 - k^2)}{k^2 k'^2} = \frac{\sqrt{j - 27 \cdot 64}}{2 \cdot 27}, \end{aligned}$$

und daher der Bedingung genügen

$$(14) \quad g_2^3 - 27g_3^2 = 16.$$

Die Grundformeln für die lineare Transformation dieser Functionen ergeben sich mittelst der Formeln (24) § 5:

$$(15) \quad \begin{aligned} g_2(\omega + 1) &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} g_2(\omega), \\ g_3(\omega + 1) &= -g_3(\omega) \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} g_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= g_2(\omega) \\ g_3\left(-\frac{1}{\omega}\right) &= -g_3(\omega). \end{aligned}$$

§ 7. Der Modul und die Invariante als unabhängige Variable.

Während in den bisherigen Betrachtungen der Modul k^2 und die Invariante $j(\omega)$ als Functionen von ω betrachtet wurden, wollen wir jetzt umgekehrt das Periodenverhältniss ω als Function der ersteren untersuchen. Am vollständigsten geschieht dies vermittelt der Darstellung durch hypergeometrische Reihen. Da diese Darstellungen aber für unsern Zweck nicht unbedingt erforderlich sind, so wollen wir hier nicht auf dieselben eingehen. Dagegen ist es notwendig, die Differentialgleichungen zwischen ω und j aufzustellen, die man sehr leicht aus der partiellen Differentialgleichung (§ 2 (2))

$$(1) \quad \frac{\partial^2 j}{\partial n^2} = 4\pi i \frac{\partial j}{\partial \omega}$$

ableiten kann. Wenn man die letzte Gleichung (2) § 6 nach u differenziert und dann $u = 0$ setzt, so folgt nach (1):

$$(2) \quad dk^2 = -dk'^2 = \pi i \theta_{00}^4 k'^2 d\omega,$$

woraus durch einfache Rechnung folgt:

$$(3) \quad \begin{aligned} dj &= 3^4 \cdot 2^2 g_2^2 dg_2 = 3^6 \cdot 2^3 g_3^2 dg_3, \\ \frac{dj}{g_2^2 g_3} &= -\pi i 2^3 \cdot 3^6 \cdot \sqrt[3]{2} \eta(\omega)^4 d\omega. \end{aligned}$$

Stellen wir also die complexe Variable k^2 in einer Ebene dar, so findet für die Function ω eine Verzweigung nur statt in den drei Punkten

$$k^2 = 0, \quad k^2 = 1, \quad k^2 = \infty,$$

und die verschiedenen Werte, welche ω für einen und denselben Wert von k^2 erhält, sind alle in der Form enthalten

$$(4) \quad \frac{2\gamma + \partial\omega}{\alpha + 2\beta\omega}, \quad \alpha\partial - 4\beta\gamma = 1.$$

Desgleichen folgt aus (3), dass ω als Function von j betrachtet nur in den Punkten

$$j = \infty, \quad j = 0, \quad j = 27.64$$

verzweigt ist, und dass alle Werte, deren ω für dasselbe j fähig ist, in der Form

$$(5) \quad \frac{\gamma + \partial\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad \alpha\partial - \beta\gamma = 1$$

enthalten sind.

Nun folgt aus (6) § 6

$$(6) \quad v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

wodurch v als Function von x , wenn auch nicht eindeutig, dargestellt

ist. Für $v = K$, $u = \frac{1}{2}$ hat x den Wert 1 und für $v = K + iK'$, $u = \frac{1}{2}(1 + \omega)$ den Wert $1:k$, und darnach ergibt sich aus (6)

$$(7) \quad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$iK' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

In (7) sind die Integrationswege und die Vorzeichen der Wurzeln dadurch völlig bestimmt, dass man in der u -Ebene, etwa den Seiten des Periodenparallelogramms parallel von 0 bis $\frac{1}{2}$ und von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2}(1 + \omega)$ geht, und die zugehörigen Werte $x, y = \sqrt{1-x^2}, z = \sqrt{1-k^2x^2}$ immer aus den Gleichungen (1) § 6 bestimmt.

Nimmt man ω rein imaginär an, so sind $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ reell und mithin $\sqrt{k}, \sqrt{k'}$ positive echte Brüche; und wenn u auf reellem Wege von 0 bis $\frac{1}{2}$ geht, so bleiben die vier Functionen $\theta_{00}(u), \theta_{10}(u), \theta_{01}(u), \theta_{11}(u)$ reell und positiv; denn keine derselben geht auf diesem Wege durch Null, und $\theta_{00}, \theta_{10}, \theta_{01}, \theta_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = \theta_{10}$ sind positiv. (Bezüglich θ_{00} zeigt dies die Reihe unmittelbar, und für die andern Functionen folgt das Gleiche aus den positiven Werten von $\sqrt{k}, \sqrt{k'}$.) Es bleiben also nach § 6 (1), (6) auch die Variablen x, y, z reell und positiv, und keine derselben hat auf dem Wege ein Maximum oder Minimum.

Hierdurch ist der Integrationsweg für K (längs der reellen Axe mit positivem Werte der Quadratwurzel) bestimmt. Beachtet man ferner dass nach § 2 (4) für ein rein imaginäres u die Functionen $\theta_{00}\left(u + \frac{1}{2}\right), \theta_{01}\left(u + \frac{1}{2}\right), \theta_{11}\left(u + \frac{1}{2}\right)$ reell, $\theta_{10}\left(u + \frac{1}{2}\right)$ rein imaginär bleiben, so erkennt man, dass, während u von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2}(1 + \omega)$ geht, (parallel der imaginären

Axe) x, z reell, y rein imaginär bleiben; und auch auf diesem Wege findet für keine dieser Functionen ein Maximum oder Minimum statt. Man hat also auch in dem Integral iK' den Integrationsweg von 1 bis $1:k$ längs der reellen Axe zu nehmen und zwar mit solchem Zeichen der Quadratwurzel, dass K' positiv wird. ($\sqrt{1-x^2} = -i\sqrt{x^2-1}$ und $\sqrt{x^2-1}, \sqrt{1-k^2x^2}$ positiv.)

Wenn nun die Variable k^2 in ihrer Ebene den Punkt 1 (mit Ausschluss des Punktes 0) in positivem Sinne umkreist, so umkreisen in der x -Ebene die Punkte $\pm 1:k$ resp. die Punkte ± 1 in negativem Sinne; und daraus erkennt man, indem man die Integrationswege stetig ändert, dass bei diesem Vorgang

$$K, \quad iK' \quad \text{in} \quad K + 2iK', \quad iK'$$

übergehen. Wenn der Punkt k^2 den Punkt 0 (mit Ausschluss des Punktes 1) in positivem Sinne umkreist, so geht in der x -Ebene der Punkt $1:k$ in negativem Sinne nach $-1:k$ und umgekehrt. Hieraus ergibt sich ebenso, dass hierbei

$$K, \quad iK' \quad \text{in} \quad K, \quad 2K + iK'$$

übergehen. Wenn wir also ω als Function von k^2 auffassen, so wird beim Umkreisen des Punktes 1 und 0

$$\omega \quad \text{in} \quad \frac{\omega}{1+2\omega} \quad \text{und in} \quad \omega + 2$$

übergehen. Da nun alle Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\gamma \\ 2\gamma' & \delta \end{pmatrix}$$

sich aus den beiden

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zusammensetzen lassen, so zeigt sich also, dass ω , als Function von k^2 aufgefasst, durch stetige Änderung für einen und denselben Wert von k^2 in der That alle Werte von der Form (4) anzunehmen fähig ist.

Lassen wir ferner k^2 auf reellem Wege nach $1 - k^2$ gehen, so erhält j den Ausgangswert wieder, während K und iK' übergehen in

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \quad \int_1^{k'} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

d. h. in K' , iK , wie man aus der Substitution $1 - k^2x^2 = k'^2x_1^2$ erkennt; demnach geht ω in $-1:\omega$ über. Führt man endlich durch einen halben positiven Umlauf um den Punkt $1:k^2$ in $1:k^2$ über, so geht $1:k$ durch einen halben negativen Umlauf nach dem Punkt k , j erhält seinen ursprünglichen Wert wieder, und es geht K , iK' über in

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{x^2}{k^2})}} + i \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\frac{x^2}{k^2} - 1)}},$$

$$i \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\frac{x^2}{k^2} - 1)}},$$

mit positivem Wert der Quadratwurzel. Die Substitution $x = kx_1$ zeigt aber, dass diese beiden Werte gleich

$$k(K + iK'), \quad kiK'$$

sind, und dass also ω in $\omega:(1 + \omega)$ übergegangen ist. Hieraus schliesst man nun, dass es in der j -Ebene Kreiswege giebt, durch welche

$$\omega \text{ in } \frac{-1}{\omega} \text{ und in } \frac{\omega}{1 + \omega}$$

übergeführt wird, und da alle Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

aus den beiden

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt werden können, so folgt wie oben, dass für einen und denselben Wert j die Function ω wirklich aller Werte (5) fähig ist.

Hieraus ergeben sich nun auf Grund des Satzes der Functionentheorie, dass eine einwertige Function *einer* Veränderlichen, welche überall den Charakter einer algebraischen Function hat, notwendig eine rationale Function sein muss, die folgenden speciellen Theoreme:

Wenn eine Function von ω , als Function von k^2 aufgefasst, überall einen algebraischen Charakter besitzt und

1° durch die beiden Substitutionen

$$\frac{\omega}{1 + 2\omega}, \quad \omega + 2$$

ungeändert bleibt, so ist sie eine rationale Function von k^2 ;

2° durch die Substitutionen

$$-\frac{1}{\omega}, \quad \omega + 1$$

ungeändert bleibt, so ist sie eine rationale Function von j ;

3° durch die beiden Substitutionen

$$-\frac{1}{\omega}, \quad \omega + 1$$

ihr Zeichen ändert, so ist sie das Product von g_3 mit einer rationalen Function von j ;

4° durch $-1:\omega$ ungeändert bleibt, durch $\omega + 1$ den Factor

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{oder} \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

annimmt, so ist sie das Product von g_2 oder g_2^2 mit einer rationalen Function von j ;

5° durch die Substitutionen $-1:\omega$, $\omega + 1$ beziehlich die Factoren

$$-1, \quad -e^{-\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{oder} \quad -1, \quad -e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

annimmt, so ist sie das Product von $g_2 g_3$ oder von $g_2^2 g_3$ mit einer rationalen Function von j .

III. Abschnitt.

§ 8. Das Additionstheorem.

Ein Product mehrerer θ -Functionen von der Form

$$(1) \quad \theta_{g,h}(u+v)\theta_{g',h'}(u+v')\theta_{g'',h''}(u+v'') \dots$$

ist eine θ -Function von u unter der Voraussetzung

$$v + v' + v'' + \dots \equiv 0 \pmod{1, \omega},$$

und zwar ist Ordnung und Charakteristik derselben gleich der Summe der Ordnungen und Charakteristiken der einzelnen Factoren. Man kann daher das Product (1) als ganze rationale Function der $\theta_{g,h}(u)$ ausdrücken, so zwar, dass diese Ausdrücke noch von den Variablen v, v', v'', \dots abhängen. Diese Ausdrücke erhält man aus den Nullpunkten des Productes (1). Dies ist die allgemeinste Form des *Additionstheorems* der θ -Functionen, aus welchem das Additionstheorem für die elliptischen Functionen folgt. Die einfachsten und wichtigsten unter diesen Formeln sind die folgenden

$$(2) \quad \begin{aligned} \theta_{01}^2 \theta_{01}(u+v) \theta_{01}(u-v) &= \theta_{01}^2(v) \theta_{01}^2(u) - \theta_{11}^2(v) \theta_{11}^2(u) \\ \theta_{00} \theta_{01} \theta_{00}(u+v) \theta_{01}(u-v) &= \theta_{00}(u) \theta_{00}(v) \theta_{01}(u) \theta_{01}(v) - \theta_{11}(u) \theta_{11}(v) \theta_{10}(u) \theta_{10}(v) \\ \theta_{10} \theta_{01} \theta_{10}(u+v) \theta_{01}(u-v) &= \theta_{10}(u) \theta_{10}(v) \theta_{01}(u) \theta_{01}(v) - \theta_{11}(u) \theta_{11}(v) \theta_{00}(u) \theta_{00}(v) \\ \theta_{00} \theta_{10} \theta_{11}(u+v) \theta_{01}(u-v) &= \theta_{01}(u) \theta_{11}(u) \theta_{00}(v) \theta_{10}(v) + \theta_{01}(v) \theta_{11}(v) \theta_{00}(u) \theta_{10}(u), \end{aligned}$$

aus welchen man durch Division die drei Grundformeln des Additionstheorems der elliptischen Functionen erhält:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin \operatorname{am} (u \pm v) &= \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \mp \cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin \operatorname{am} u^2 \sin \operatorname{am} v^2} \\ \cos \operatorname{am} (u \pm v) &= \frac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \mp \sin \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} v \sin \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin \operatorname{am} u^2 \sin \operatorname{am} v^2} \\ \Delta \operatorname{am} (v \pm v) &= \frac{\Delta \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} v \mp k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin \operatorname{am} u^2 \sin \operatorname{am} v^2} \end{aligned}$$

§ 9. *Multiplication der elliptischen Functionen.*

Die Function

$$\vartheta_{g,h}(nu)$$

ist, wenn n eine ganze Zahl ist, eine θ -Function der Variablen u von der Ordnung n^2 , und ihre Charakteristik ist bei ungeradem n (g, h) bei geradem n $(0, 0)$. Es lassen sich daher alle diese Functionen nach § 2 I. II rational durch die Functionen $\vartheta_{g,h}(u)$ ausdrücken, und wir wollen diesen Ausdrücken im Hinblick auf die elliptischen Functionen die folgende Gestalt geben:

I. $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{00}\vartheta_{10}\vartheta_{01}^{n^2-2}\vartheta_{11}(nu) \\ &= \vartheta_{00}(u)\vartheta_{01}(u)\vartheta_{10}(u)\vartheta_{11}(u) \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} a_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-2-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \\ & \vartheta_{01}^{n^2}\vartheta_{10}(nu) = \vartheta_{10} \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} b_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-1-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \\ & \vartheta_{01}^{n^2}\vartheta_{00}(nu) = \vartheta_{01} \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} c_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \\ & \vartheta_{01}^{n^2}\vartheta_{01}(nu) = \vartheta_{01} \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} d_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \end{aligned}$$

II. $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\begin{aligned} & \vartheta_{01}^{n^2-1}\vartheta_{11}(nu) = \vartheta_{11}(u) \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} a_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-1-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \\ & \vartheta_{01}^{n^2-1}\vartheta_{10}(nu) = \vartheta_{10}(u) \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} b_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-1-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \\ & \vartheta_{01}^{n^2-1}\vartheta_{00}(nu) = \vartheta_{00}(u) \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} c_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-1-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \\ & \vartheta_{01}^{n^2-1}\vartheta_{01}(nu) = \vartheta_{01}(u) \sum_{\nu=0}^{\frac{n^2-1}{2}} d_{\nu}\vartheta_{11}(u)^{2\nu}\vartheta_{01}(u)^{n^2-1-2\nu} \frac{\vartheta_{00}^{2\nu}}{\vartheta_{10}^{2\nu}} \end{aligned}$$

oder indem man die elliptischen Functionen x, y, z (§ 6) einführt:

III. $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$\frac{\vartheta_{00} \vartheta_{01}^{n^2-1}}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{11}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = xyz \sum a_\nu x^{2\nu} = xyz A(x^2, k^2), \quad a_0 = n$$

$$\frac{\vartheta_{01}^{n^2}}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{10}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = \sum b_\nu x^{2\nu} = B(x^2, k^2), \quad b_0 = 1$$

$$\frac{\vartheta_{01}^{n^2}}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{00}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = \sum c_\nu x^{2\nu} = C(x^2, k^2), \quad c_0 = 1$$

$$\vartheta_{01}^{n^2-1} \frac{\vartheta_{01}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = \sum d_\nu x^{2\nu} = D(x^2, k^2), \quad d_0 = 1.$$

IV. $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\frac{\vartheta_{00} \vartheta_{01}^{n^2-1}}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{11}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = x \sum a_\nu x^{2\nu} = x A(x^2, k^2), \quad a_0 = n$$

$$\frac{\vartheta_{01}^{n^2}}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{10}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = y \sum b_\nu x^{2\nu} = y B(x^2, k^2), \quad b_0 = 1$$

$$\frac{\vartheta_{01}^{n^2}}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{00}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = z \sum c_\nu x^{2\nu} = z C(x^2, k^2), \quad c_0 = 1$$

$$\vartheta_{01}^{n^2-1} \frac{\vartheta_{01}(nu)}{\vartheta_{01}(u)^{n^2}} = \sum d_\nu x^{2\nu} = D(x^2, k^2), \quad d_0 = 1.$$

Da von den vier Functionen $\vartheta_{11}(nu)$, $\vartheta_{10}(nu)$, $\vartheta_{00}(nu)$, $\vartheta_{01}(nu)$ nicht zwei für denselben Wert von u verschwinden, so sind die vier Functionen A, B, C, D ohne gemeinschaftlichen Teiler. Für die elliptischen Functionen ergeben sich daraus die folgenden Multiplicationsformeln.

$n \equiv 0 \pmod{2}$

$n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\sin \operatorname{am}(nv) = \frac{xyz A(x^2)}{D(x^2)}, \quad \sin \operatorname{am}(nv) = \frac{x A(x^2)}{D(x^2)}$$

$$(1) \quad \cos \operatorname{am}(nv) = \frac{B(x^2)}{D(x^2)}, \quad (2) \quad \cos \operatorname{am}(nv) = \frac{y B(x^2)}{D(x^2)}$$

$$\Delta \operatorname{am}(nv) = \frac{C(x^2)}{D(x^2)}, \quad \Delta \operatorname{am}(nv) = \frac{z C(x^2)}{D(x^2)}.$$

Das Additionstheorem liefert zur Berechnung der Functionen A , B , C , D Recursionsformeln, die sich mit Rücksicht auf die in I bis IV angegebenen Werte $A(o)$, $B(o)$, $C(o)$, $D(o)$ leicht ergeben

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{2n} = 2A_n B_n C_n D_n \\ B_{2n} = B_n^2 D_n^2 - x^2 y^2 z^2 A_n^2 C_n^2, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ \quad = y^2 B_n^2 D_n^2 - x^2 z^2 A_n^2 C_n^2, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ C_{2n} = C_n^2 D_n^2 - k^2 x^2 y^2 z^2 A_n^2 B_n^2, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ \quad = z^2 C_n^2 D_n^2 - k^2 x^2 y^2 A_n^2 B_n^2, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ D_{2n} = D_n^4 - k^2 x^4 y^4 z^4 A_n^4, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ \quad = D_n^4 - k^2 x^4 A_n^4, & n \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_{2n+1} = y^2 z^2 A_n D_n B_{n+1} C_{n+1} + A_{n+1} D_{n+1} C_n B_n, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ \quad = A_n D_n B_{n+1} C_{n+1} + y^2 z^2 A_{n+1} D_{n+1} C_n B_n, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ B_{2n+1} = D_n D_{n+1} B_n B_{n+1} - x^2 z^2 A_n A_{n+1} C_n C_{n+1}, \\ C_{2n+1} = C_n C_{n+1} D_n D_{n+1} - k^2 x^2 y^2 A_n A_{n+1} B_n B_{n+1}, \\ D_{2n+1} = D_n^2 D_{n+1}^2 - k^2 x^4 y^2 z^2 A_n^2 A_{n+1}^2. \end{array} \right.$$

Aus diesen Formeln schliesst man, dass die Coëfficienten a_ν , b_ν , c_ν , d_ν ganze rationale Functionen von k^2 sind mit ganzzahligen Coëfficienten, und zwar höchstens vom Grade ν ; denn in den ersten Fällen $n = 1$, $n = 2$ haben diese Eigenschaften statt, und aus (3) und (4) folgen dieselben unter der Voraussetzung dass sie für n und $n + 1$ richtig sind, für $2n$ und $2n + 1$.

Zwischen den Functionen A , B , C , D bestehen die Relationen

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D^2 = B^2 + x^2 y^2 z^2 A^2 = C^2 + k^2 x^2 y^2 z^2 A^2, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ D^2 = x^2 A^2 + y^2 B^2 = k^2 x^2 A^2 + z^2 C^2, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{array} \right.$$

ferner wenn n ungerade ist:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad A(x^2) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{z}{\sqrt{k}} \right)^{n^2-1} B\left(\frac{y^2}{z^2}\right) \\
 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\sqrt{\frac{k}{k'}} y \right)^{n^2-1} C\left(\frac{z^2}{k^2 y^2}\right) \\
 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\sqrt{k'x})^{n^2-1} D\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right),
 \end{aligned}$$

wie man nach § 2 (4) findet, wenn man in II u ersetzt durch $u + \frac{1}{2}$, $u + \frac{\omega}{2}$, $u + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}$.

§ 10. *Teilung der elliptischen Functionen durch 2 und die Potenzen von 2.*

Die Teilungsaufgabe, d. h. die Berechnung von

$$\sin \operatorname{am} \frac{u}{n}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{u}{n}, \quad \Delta \operatorname{am} \frac{u}{n}$$

aus den als bekannt vorausgesetzten Werten von $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$, besteht in der Auflösung der Gleichungen (1), (2) § 9 in Beziehung auf x , y , z . Diese Aufgabe erfordert eine andere Behandlung für ein gerades und für ein ungerades n . Wir behandeln zunächst die Teilung durch $2^{(1)}$ wofür, wenn

$$x = \sin \operatorname{am} \frac{v}{2}, \quad y = \cos \operatorname{am} \frac{v}{2}, \quad z = \Delta \operatorname{am} \frac{v}{2}$$

gesetzt wird, sich die Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin \operatorname{am} v &= \frac{2xyz}{1 - k^2 x^4} \\
 \cos \operatorname{am} v &= \frac{y^2 - x^2 z^2}{1 - k^2 x^4} \\
 \Delta \operatorname{am} v &= \frac{z^2 - k^2 x^2 y^2}{1 - k^2 x^4},
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ ABEL, Oeuvres éd. SÆLOW I, S. 292.

von denen die beiden letzten Gleichungen zweiten Grades für x^2 sind, die aber nur *eine* gemeinschaftliche Wurzel haben; denn die Wurzeln der ersteren sind

$$\sin \operatorname{am} \frac{v}{2}, \quad \sin \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + K \right)^2$$

die der letzteren

$$\sin \operatorname{am} \frac{v}{2}, \quad \sin \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + K + iK' \right)^2.$$

Man findet nun leicht:

$$(2) \quad \begin{aligned} 1 + \cos \operatorname{am} v &= \frac{2y^2}{1 - k^2 x^4}, & 1 + \Delta \operatorname{am} v &= \frac{2z^2}{1 - k^2 x^4} \\ 1 - \cos \operatorname{am} v &= \frac{2x^2 z^2}{1 - k^2 x^4}, & 1 - \Delta \operatorname{am} v &= \frac{2k^2 x^2 y^2}{1 - k^2 x^4} \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{am} v}{1 + \Delta \operatorname{am} v}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \Delta \operatorname{am} v}{1 + \cos \operatorname{am} v}} \\ y &= \sqrt{\frac{\Delta \operatorname{am} v + \cos \operatorname{am} v}{1 + \Delta \operatorname{am} v}}, & z &= \sqrt{\frac{\Delta \operatorname{am} v + \cos \operatorname{am} v}{1 + \cos \operatorname{am} v}}. \end{aligned}$$

Jedem dieser drei Wurzelzeichen kann das doppelte Vorzeichen beigelegt werden; aber es besteht zwischen denselben nach der ersten Gleichung (1) noch eine Relation, durch welche eines der drei Zeichen durch die beiden andern bestimmt ist. Die so erhaltenen vier Wertsysteme haben die Bedeutung:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am} \frac{v}{2}, & \quad \cos \operatorname{am} \frac{v}{2}, & \quad \Delta \operatorname{am} \frac{v}{2} \\ \sin \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2K \right), & \quad \cos \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2K \right), & \quad \Delta \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2K \right) \\ \sin \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2iK' \right), & \quad \cos \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2iK' \right), & \quad \Delta \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2iK' \right) \\ \sin \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2K + 2iK' \right), & \quad \cos \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2K + 2iK' \right), & \quad \Delta \operatorname{am} \left(\frac{v}{2} + 2K + 2iK' \right). \end{aligned}$$

Es ergibt sich hieraus, dass man die Teilungsaufgabe für beliebige Potenzen von 2 durch eine *Kette von Quadratwurzeln* auflösen kann, und wenn man daher die Teilung durch ungerade Zahlen als gelöst voraussetzt, so erfordert die Teilung durch beliebige gerade Zahlen nur noch das Ausziehen von Quadratwurzeln. Wir beschäftigen uns daher im Folgenden nur noch mit der Teilung durch ungerade Zahlen.

§ 11. Teilung durch eine ungerade Zahl.

Setzt man

$$x = \sin \operatorname{am} \frac{v}{n}, \quad y = \cos \operatorname{am} \frac{v}{n}, \quad z = \Delta \operatorname{am} \frac{v}{n},$$

so ergeben sich zur Bestimmung dieser Grössen aus § 9 (2) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} D(x^2) \sin \operatorname{am} v - xA(x^2) &= 0 \\ (2) \quad D(x^2) \cos \operatorname{am} v - yB(x^2) &= 0 \\ D(x^2) \Delta \operatorname{am} v - zC(x^2) &= 0, \end{aligned}$$

deren jede in Bezug auf die Unbekannte x , resp. y , z vom Grade n^2 ist. Durch die letzten dieser Gleichungen kann aber, *falls man nicht nur $\sin \operatorname{am} v$ sondern auch $\cos \operatorname{am} v$ und $\Delta \operatorname{am} v$ zu den gegebenen Grössen rechnet, y , z rational durch die Unbekannte x ausgedrückt werden*,⁽¹⁾ so dass man für die drei Unbekannten x , y , z nur n^2 verschiedene Wertsysteme erhält, welche die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} x_{\mu, n'} &= \sin \operatorname{am} \left(\frac{v}{n} + \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n} \right) \\ (3) \quad y_{\mu, n'} &= \cos \operatorname{am} \left(\frac{v}{n} + \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n} \right) \\ z_{\mu, n'} &= \Delta \operatorname{am} \left(\frac{v}{n} + \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n} \right), \end{aligned}$$

(¹) Auf der Benutzung dieses Umstandes beruht der Fortschritt, den JACOBI gegen über der ersten ABEL'schen Lösung des Teilungsproblems gemacht hat. ABEL, Oeuvres éd. SYLOW I, S. 294. JACOBI, gesammelte Werke, S. 243, 403.

worin μ, μ' je ein vollständiges Restsystem (mod n) durchlaufen. Rechnet man nun die Grössen

$$(4) \quad \sin \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}, \quad \cos \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}, \quad \Delta \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n},$$

deren Bestimmung Gegenstand des nächsten Paragraphen sein wird, zu den bekannten Grössen, so kann man in Folge des Additionstheorems jede der Wurzeln $x_{\mu, \mu'}$ durch jede andere *rational* ausdrücken. Wenn aber

$$x_{\mu, \mu'} = F_{\mu, \mu'}(x_0, 0)$$

ist, so ergibt sich aus der Bedeutung der Wurzeln (3)

$$x_{\mu+\nu, \mu'+\nu'} = F_{\mu, \mu'}(x_{\nu, \nu'}) = F_{\mu+\nu, \mu'+\nu'}(x_0, 0),$$

und also

$$F_{\mu, \mu'} F_{\nu, \nu'}(x) = F_{\mu+\nu, \mu'+\nu'}(x).$$

Die Gleichung vom Grade n^2 , deren Wurzeln die $x_{\mu, \mu'}$ sind, ist also (nach Adjunction von $\sin \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} v$, $\Delta \operatorname{am} v$ und der Grössen (4)) eine ABEL'sche Gleichung und daher *algebraisch auflösbar*. (ABEL, Oeuvres éd. SLOW. I, S. 132.)

§ 12. Die Theilung der Perioden.

Die noch zu lösende Aufgabe besteht nun in der algebraischen Bestimmung der Grössen

$$(1) \quad x_{\mu, \mu'} = \sin \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}$$

oder in der *Theilung der Perioden*. Diese Grössen sind die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \quad xA(x^2) = 0$$

und die beiden anderen

$$y_{\mu, \mu'} = \cos \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}, \quad z_{\mu, \mu'} = \Delta \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}$$

können durch diese rational ausgedrückt werden durch die Gleichungen

$$(3) \quad y = \frac{D(x^2)}{B(x^2)}, \quad z = \frac{D(x^2)}{C(x^2)},$$

Aus den Wurzeln der Gleichung $A(x^2) = 0$ lassen sich ferner die Wurzeln der Gleichungen $B(x^2) = 0$, $C(x^2) = 0$, $D(x^2) = 0$ nach den Formeln (6) § 9 rational bestimmen, deren Bedeutung ist:

$$\sin \operatorname{am} \frac{(4\mu + 1)K + 4\mu' i K'}{n}, \quad \sin \operatorname{am} \frac{(4\mu + 1)K + (4\mu' + 1)iK'}{n}, \\ \sin \operatorname{am} \frac{4\mu K + (4\mu' + 1)iK'}{n},$$

und hiernach sind durch Auflösung der Gleichung $A(x^2) = 0$, welcher alle Functionen von der Form

$$x^2 = \left(\sin \operatorname{am} \frac{2\mu K + 2\mu' i K'}{n} \right)^2$$

genügen, die sämtlichen Grössen

$$\left(\sin \operatorname{am} \frac{\mu K + \mu' i K'}{n} \right)^2$$

bestimmt, wenn μ, μ' irgend ganze Zahlen sind.

§ 13. Die Galois'sche Gruppe und die irreductibeln Factoren der Teilungsgleichung.

Die Grössen $x_{\mu, \mu'}$ sind algebraische Functionen von k^2 , welche mit Ausnahme der Werte 0, 1 für alle endlichen Werte von k^2 endlich und stetig sind. Durch einen positiven Umlauf von k^2 um einen dieser singulären Punkte geht nach § 7

$$x_{\mu, \mu'} \text{ über in } x_{\mu, 2\mu + \mu'} \text{ resp. in } x_{\mu, 2\mu' + \mu'}.$$

Also geht beim Durchlaufen irgend eines Kreisweges

$$x_{\mu, \mu'} \text{ in } x_{a\mu + 2\beta\mu', 2\gamma\mu + \delta\mu'}, \quad a\delta - 4\beta\gamma = 1$$

über, oder auch, da die Zahlen μ, μ' nur nach dem Modul n bestimmt sind

$$x_{\mu, \mu'} \quad \text{in} \quad x_{\alpha\mu + \beta\mu', \gamma\mu + \delta\mu'}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n},$$

und es lässt sich der Weg so bestimmen, dass die vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche der Bedingung

$$(1) \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n}$$

genügende Werte haben.

Wenn daher eine rationale Function von k^2 und den Wurzeln $x_{\mu, \mu'}$ die Eigenschaft hat, durch alle Substitutionen

$$(2) \quad \left(\begin{matrix} \mu & , & \mu' \\ \alpha\mu + \beta\mu' & , & \gamma\mu + \delta\mu' \end{matrix} \right),$$

die wieder mit

$$\left(\begin{matrix} \alpha & , & \beta \\ \gamma & , & \delta \end{matrix} \right)$$

bezeichnet sein sollen, ungeändert zu bleiben, so ist sie (nach § 7) rational durch k^2 ausdrückbar, und umgekehrt hat jede rational durch k^2 ausdrückbare Function diese Eigenschaft. *Der Inbegriff der Substitutionen (2) bildet also die GALOIS'sche Gruppe der Teilungsgleichung $A(x^2) = 0$.*

Es ist dies aber nur die sogenannte *Monodromie-Gruppe*, d. h. es ist nur dann die Gruppe der Gleichung, wenn als Rationalitätsbereich der Inbegriff *aller* rationalen Functionen von k^2 betrachtet wird. Es bleiben aber noch die beiden Fragen zu beantworten:

1. Welche Zahlenirrationalitäten müssen adjungirt werden, damit die Monodromiegruppe die wirkliche Gruppe der Gleichung sei.

2. Welches ist die Gruppe der Gleichung, wenn überhaupt irrationale Zahlen nicht adjungirt werden.

Zur Beantwortung dieser beiden Fragen bemerken wir zunächst Folgendes:

1°. Nach dem Additions- und Multiplicationstheorem kann man alle $x_{\mu, \mu'}$ ausdrücken durch die beiden

$$x_{1,0} = \sin \operatorname{am} \frac{4K}{n}, \quad x_{0,1} = \sin \operatorname{am} \frac{4iK'}{n}$$

und zwar rational durch k^2 und rationale Zahlen. Wenn man in diesen Ausdrücken $x_{1,0}$ durch $x_{\lambda,0}$, d. h. K durch λK ersetzt, so geht $x_{\mu,\nu}$ über in $x_{\lambda\mu,\nu}$.

2°. Aus den Entwicklungen

$$\frac{1}{2} \sqrt{k} = q^{\frac{1}{4}} \frac{1 + q^2 + q^6 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots}$$

$$\sin \operatorname{am} \frac{4K}{n} = \frac{1}{i\sqrt{k}} \frac{\sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{2\pi i}{n} (2\nu + 1)}}{\sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} e^{\frac{4\pi i \nu}{n}}}$$

$$\sin \operatorname{am} \frac{4\lambda K}{n} = \frac{1}{i\sqrt{k}} \frac{\sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{2\lambda\pi i}{n} (2\nu + 1)}}{\sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} e^{\frac{4\lambda\pi i \nu}{n}}}$$

$$\sin \operatorname{am} \frac{4iK'}{n} = \frac{1}{i\sqrt{k}} \frac{\sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4(\nu + \frac{1}{2})}{n}}}{\sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu^2 + \frac{4\nu}{n}}}$$

folgt zunächst, dass q in eine Reihe nach steigenden Potenzen von

$$\frac{k^2}{16}$$

entwickelbar ist, deren Coefficienten *ganze Zahlen* sind, und deren erstes Glied $k^2:16$ den Coefficienten 1 hat. Daraus folgt dann weiter, dass

$$i \sin \operatorname{am} \frac{4iK'}{n}$$

sich in eine Reihe nach steigenden Potenzen von

$$\sqrt[n]{\frac{k^2}{16}}$$

mit *rationalen* Zahlencoëfficienten entwickeln lässt. Endlich lässt sich

$$i \sin \operatorname{am} \frac{4K}{n}$$

in eine Reihe nach steigenden Potenzen von k^2 entwickeln, deren Coefficienten ausser rationalen Zahlen noch die n^{te} Einheitswurzel

$$e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

enthalten.

3. Wenn nun eine rationale Function der Wurzeln $x_{n,r}$, deren Coefficienten rationale Functionen von k^2 und rationalen Zahlen sind, einer rationalen Function r von k^2 gleich ist, so genügt r (als Function der Wurzeln $x_{n,r}$) jedenfalls einer algebraischen Gleichung, welche rational von k^2 und rationalen Zahlen abhängt, und kann daher durch Multiplication mit einer ganzen rationalen Function von k^2 mit rationalen Zahlcoefficienten in eine ganze Function von k^2 verwandelt werden. Wir können also auch annehmen, dass r bereits eine ganze rationale Function von k^2 sei. Mit Anwendung von 1. ergibt sich also daraus eine Gleichung von der Form

$$(3) \quad \phi\left(k^2, \sin \operatorname{am} \frac{4K}{n}, \sin \operatorname{am} \frac{4iK'}{n}\right) = r,$$

worin ϕ eine rationale Function seiner Argumente mit rationalen Zahlcoefficienten, r eine ganze rationale Function von k^2 mit vorläufig noch unbestimmten Zahlcoefficienten bedeutet. Da nun die Substitution

$$\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

zur Monodromiegruppe gehört, so bleibt die Gleichung (3) richtig, wenn in derselben die Vorzeichen von

$$\sin \operatorname{am} \frac{4K}{n}, \quad \sin \operatorname{am} \frac{4iK'}{n}$$

zugleich geändert werden; und daher zerfällt die Gleichung (3) in zwei andere

$$(4) \quad \phi_1 = r, \quad \phi_2 = 0,$$

so dass die Summen der Exponenten von

$$\sin \operatorname{am} \frac{4K}{n}, \quad \sin \operatorname{am} \frac{4iK'}{n}$$

in der ersten gerade, in der zweiten ungerade Zahlen sind.

Nun lässt sich aber in Folge von (2) die Function ϕ_1 in eine Potenzreihe entwickeln nach steigenden Potenzen von $\sqrt[k^2]{k^2+16}$, deren Coefficienten ausser rationalen Zahlen nur n^{te} Einheitswurzeln enthalten, und daher kann auch die Function r keine anderen irrationalen Zahlen enthalten. Derselbe Schluss ist auch dann noch anwendbar, wenn die Function ϕ in ihren Coefficienten n^{te} Einheitswurzeln enthält. Damit ist die erste der oben gestellten Fragen dahin zu beantworten:

Die Monodromiegruppe ist die wahre Gruppe der Gleichung, wenn n^{te} Einheitswurzeln adjungirt werden.

4. Um die zweite Frage zu beantworten, müssen wir in (4) r mit rationalen Coefficienten behaftet annehmen. Unter dieser Voraussetzung bleiben aber die beiden Gleichungen (4) bestehen, wenn die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, die in den Entwicklungen vorkommt, durch eine beliebige andere $e^{\frac{2\pi i \lambda}{n}}$ ersetzt wird, wenn wir λ zu n relativ prim voraussetzen. (Wegen der Irreducibilität der Gleichung, welcher die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln genügen.) Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass in allen rationalen Gleichungen zwischen den Wurzeln $x_{g,n}$ die Substitution

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ausgeführt werden kann. Da man aber aus dieser Substitution und der Substitution (2) alle Substitutionen von der Form

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \mu & \mu' \\ a\mu + b\mu' & c\mu + d\mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

in welchen $ad - bc$ zu n relativ prim ist, (würde $ad - bc$ einen Teiler mit n gemein haben, so würden die Ausdrücke $a\mu + b\mu'$, $c\mu + d\mu'$ nicht im Stande sein, alle Zahlenpaare $\mu, \mu' \pmod{n}$ darzustellen und (5) würde nicht die Bedeutung einer Substitution haben) zusammensetzen kann, so folgt, dass die Galois'sche Gruppe der Teilungsgleichung alle Substitutionen von der Form (5) enthält.

5. Es bleibt noch zu zeigen, dass die GALOIS'sche Gruppe der Teilungsgleichung keine anderen als die durch (5) dargestellten Substitutionen enthält. Nach dem Additions- und Multiplicationstheorem ist, wenn

f und φ rationale Functionen bedeuten (welche k^2 und rationale Zahlen enthalten)

$$(6) \quad x_{\mu+\nu, \mu'+\nu'} = f(x_{\mu, \mu'}, x_{\nu, \nu'})$$

$$(7) \quad x_{m\mu, m\mu'} = \varphi(x_{\mu, \mu'}).$$

Auf diese Gleichungen kann man jede Substitution der Gruppe anwenden. Wenn nun durch irgend eine dieser Substitutionen $(1, 0)$ in $(a, c); (0, 1)$ in (b, d) übergeht, dann geht wegen (7) $(\mu, 0)$ in $(\mu a, \mu c), (0, \mu')$ in $(\mu' b, \mu' d)$ über, und wegen (6) (μ, μ') in $(a\mu + b\mu', c\mu + d\mu')$; also sind alle Substitutionen der Gruppe in der Form (5) enthalten, und der *Inbegriff aller Substitutionen (5) ist die Galois'sche Gruppe der Teilungsgleichung.*⁽¹⁾

6. Durch die Substitutionen (5) bleibt der grösste gemeinschaftliche Teiler der beiden Indices μ, μ' und n stets erhalten und daraus folgt, was auch leicht direct einzusehen ist, dass die Teilungsgleichung in rationale Factoren zerfällt, in der Weise, dass alle diejenigen Wurzeln $x_{\mu, \mu'}$, in welchen μ, μ' einen und denselben grössten gemeinschaftlichen Teiler mit n haben, einer besonderen rationalen Gleichung genügen. Diejenige unter diesen Gleichungen, für welche μ, μ', n ohne gemeinsamen Teiler sind, wollen wir die *eigentliche Teilungsgleichung* für den Divisor n nennen. Die anderen $x_{\mu, \mu'}$ sind zugleich Wurzeln von niedrigeren Teilungsgleichungen. Um den Grad der eigentlichen Teilungsgleichung zu bestimmen, hat man nur die Anzahl derjenigen Paare nach n incongruenter Zahlen μ, μ' zu bestimmen, für welche n, μ, μ' ohne gemeinsamen Teiler sind. Bezeichnen wir diesen Grad für den Augenblick mit $\chi(n)$, so ergibt sich zunächst, wenn m, n relativ prim sind:

$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n),$$

⁽¹⁾ Die Monodromiegruppe der Teilungsgleichung ist von C. JORDAN untersucht, welcher auch den in No. 5 behandelten Teil der Frage, nach der algebraischen Gruppe zuerst erledigt hat. (*Traité des substitutions*, S. 342.) Die vollständige GALOIS'sche Gruppe der Teilungsgleichung ist zuerst von SYLOW auf einem von dem unsrigen verschiedenen Weg bestimmt worden. (Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania, 1871.) Derselben Frage ist endlich eine Arbeit von KRONECKER in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 19 Juni 1875 gewidmet.

und wenn m eine Potenz einer Primzahl p ist:

$$\chi(m) = m^2 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

woraus allgemein folgt:

$$(8) \quad \chi(n) = n^2 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \varphi(n) \psi(n),$$

wenn

$$(9) \quad \varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

die Anzahl der Zahlclassen $(\bmod n)$ bedeutet welche zu n teilerfremde Zahlen enthalten, und

$$(10) \quad \psi(n) = n \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

ist, worin p jedesmal die sämtlichen in n enthaltenen Primzahlen durchläuft.

7. Die GALOIS'sche Gruppe der eigentlichen Teilungsgleichung ist genau dieselbe wie die oben bestimmte der uneigentlichen; denn sie besteht aus denjenigen Substitutionen der letzteren, welche (μ, μ') verändern, wenn μ, μ', n ohne gemeinschaftlichen Teiler sind. Dies thut aber jede dieser Substitutionen (mit Ausnahme der identischen); denn die Substitution

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

verändert $(1, 0), (0, 1)$ in $(a, c), (b, d)$.

Die Anzahl der Substitutionen dieser Gruppe ist

$$n\varphi(n)^2\psi(n).$$

8. Die eigentliche Teilungsgleichung ist irreductibel in dem Gebiet der rationalen Functionen von k^2 . Denn man kann selbst in der Monodromiegruppe eine Substitution finden, welche eine beliebige Wurzel (μ, μ') der eigentlichen Teilungsgleichung in eine beliebige andere (ν, ν') überführt.

Denn wenn μ, μ' und ebenso ν, ν' ohne gemeinsamen Teiler mit n gegeben sind, so kann man immer die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Congruenzen

$$\alpha\mu + \beta\mu' \equiv \nu$$

$$\gamma\mu + \delta\mu' \equiv \nu' \pmod{n}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$$

entsprechend bestimmen. (Es genügt, $(\mu, \mu') = (1, 0)$ anzunehmen, wobei die Möglichkeit dieser Congruenzen sofort in die Augen springt.)

§ 14. Zurückführung der Teilungsgleichung auf Transformationsgleichungen.

Die Wurzeln der eigentlichen Teilungsgleichung lassen sich in folgender Weise in *Reihen* anordnen. Man wähle nach Belieben eine der Wurzeln

$$x_{\mu_1, \mu'_1} = \sin \operatorname{am} \left(\frac{4\mu_1 K + 4\mu'_1 i K'}{n} \right) = \sin \operatorname{am} \Omega_1.$$

Unter den Wurzeln kommen auch die sämtlichen $\varphi(n)$ Grössen

$$(R_1) \quad \sin \operatorname{am} (s\Omega_1)$$

vor, welche, wenn s ein vollständiges System incongruenter zu n teilerfremder Zahlen durchläuft, alle von einander verschieden sind. Das System (R_1) wollen wir die *erste Reihe* der Wurzeln nennen. Ist nun $\sin \operatorname{am} \Omega_2$ in (R_1) nicht enthalten, so bilden die $\varphi(n)$ Grössen

$$(R_2) \quad \sin \operatorname{am} (s\Omega_2),$$

welche sowohl von einander als von den Grössen der Reihe (R_1) verschieden sind, eine zweite Reihe; und auf diese Weise kann man fortfahren, bis die sämtlichen $\varphi(n)\varphi(n)$ Wurzeln in $\varphi(n)$ Reihen von je $\varphi(n)$ Gliedern verteilt sind.

Diese Einteilung in Reihen ist von der Willkürlichkeit in der An-

nahme über $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ unabhängig; denn es ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Wurzeln

$$\sin \operatorname{am} \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}, \quad \sin \operatorname{am} \frac{4\nu K + 4\nu' i K'}{n}$$

derselben Reihe angehören

$$(1) \quad \mu\nu' - \nu\mu' \equiv 0 \pmod{n};$$

denn *erstens* wenn $\nu \equiv s\mu, \nu' \equiv s\mu' \pmod{n}$, so ist die Bedingung (1) erfüllt; und *zweitens* da μ, μ' keinen Teiler mit n gemein haben, so lassen sich ganze Zahlen α, β so bestimmen, dass

$$\alpha\mu - \beta\mu' \equiv 1 \pmod{n}$$

und daraus folgt mittels (1)

$$\nu \equiv (\nu\alpha - \nu'\beta)\mu, \quad \nu' \equiv (\nu\alpha - \nu'\beta)\mu' \pmod{n}.$$

Die Congruenz (1) bleibt aber erhalten, wenn auf die beiden Wurzeln (μ, μ') und (ν, ν') gleichzeitig eine lineare Substitution angewandt wird, so dass die Reihen nicht verändert sondern nur unter einander vertauscht werden durch die Substitutionen der Gruppe der Teilungsgleichung.

Nach dem Multiplicationstheorem lässt sich jede Wurzel der Teilungsgleichung rational (in Bezug auf k^2 und rationale Zahlen) durch jede andere derselben Reihe ausdrücken. Es sei nämlich

$$(2) \quad \sin \operatorname{am} (sv) = f_s(\sin \operatorname{am} v);$$

dann ergibt sich, wenn $\sin \operatorname{am} (s\Omega)$ die Wurzeln einer Reihe sind:

$$(3) \quad \sin \operatorname{am} (ss'\Omega) = f_s f_{s'}(\sin \operatorname{am} \Omega) = f_{s'} f_s(\sin \operatorname{am} \Omega),$$

woraus man mit Hülfe des schon oben benutzten ABEL'schen Satzes schliesst:

Wenn man die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Reihe als bekannt voraussetzt, so sind die Wurzeln dieser Reihe selbst durch Wurzelziehen zu bestimmen.

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Reihe lassen sich rational darstellen durch eine dieser Wurzeln vermittelt eines Ausdrucks,

zum Rationalitätsbereich. Setzt man also

$$\begin{aligned}\phi(\pi) &= (\pi - \pi_1)\phi_0(\pi) + \pi_1(\pi - \pi_2)\phi_1(\pi) + \dots + \pi_1\pi_2\dots\pi_{v-1}\phi_{v-1}(\pi), \\ \frac{\phi(\pi)}{\pi - \pi_1} &= \phi_0(\pi_1) + \pi_1\phi_1(\pi_1) + \dots + \pi_1^{v-1}\phi_{v-1}(\pi_1),\end{aligned}$$

so folgt:

$$(5) \quad \psi_1\phi'(\pi_1) = a_0\phi_0(\pi_1) + a_1\phi_1(\pi_1) + \dots + a_{v-1}\phi_{v-1}(\pi_1),$$

worin $\phi'(\pi_1)$ von Null verschieden ist.

§ 15. *Besondere Transformationsgleichungen.*

Die einfachsten Functionen, welche zur Bildung von Transformationsgleichungen benutzt werden können, sind, wenn ϕ eine rationale Function bedeutet, Producte von der Form

$$(1) \quad \prod_{1, n-1}^s \phi(\sin \text{am } s\Omega_i).^{(1)}$$

Diese Function bleibt offenbar ungeändert, wenn s statt der Werte $1, 2, \dots, n-1$ ein anderes Restsystem (mod n) durchläuft, und also auch wenn Ω_i durch $h\Omega_i$ ersetzt wird, falls h zu n teilerfremd ist. Die Functionen $\sin \text{am } s\Omega_i$ sind aber paarweise gleich und entgegengesetzt, und wenn s die Zahlen $1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}(n-1)$ durchläuft, so haben die Zahlen sh , vom Vorzeichen abgesehen, dieselben Zahlen als absolut kleinste Reste. Wenn daher $\phi(x)$ eine gerade Function von x ist, so ist auch das Product

$$(2) \quad \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^s \phi(\sin \text{am } s\Omega_i)$$

Wurzel einer Transformationsgleichung.

(¹) Functionen dieser Art sind auch dann Wurzeln von Transformationsgleichungen, wenn s nur die zu n teilerfremden Zahlen der Reihe 1 bis $n-1$ durchläuft. Solche Transformationsgleichungen sind bis jetzt noch wenig oder nicht untersucht.

Ist aber $\phi(x)$ eine ungerade Function und

$$(3) \quad \Pi(\Omega) = \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\epsilon} \phi(\sin \operatorname{am} s\Omega),$$

so ist in Folge eines zahlentheoretischen Satzes

$$(4) \quad \Pi(h\Omega) = \left(\frac{h}{n}\right) \Pi(\Omega)^{(1)};$$

also bleibt die Function $\Pi(\Omega)$ nicht ungeändert, sondern kann ihr Vorzeichen ändern, wenn die Wurzel $\sin \operatorname{am} \Omega$ durch eine andere Wurzel derselben Reihe ersetzt wird. Diese Vorzeichenänderung ist nur dann (für alle Werte von h) ausgeschlossen, wenn n eine *Quadratzahl* ist, und unter dieser Voraussetzung, aber auch nur unter dieser, ist auch diese Function Wurzel einer Transformationsgleichung. In anderen Fällen gilt dasselbe erst von dem Quadrat dieser Function.

Wir wollen ins Besondere die folgenden Functionen betrachten:

$$(5) \quad \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\epsilon} \frac{\Delta \operatorname{am}(s\Omega)^2}{\cos \operatorname{am}(s\Omega)}, \quad \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\epsilon} \frac{\cos \operatorname{am}(s\Omega)^2}{\Delta \operatorname{am}(s\Omega)}, \quad \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\epsilon} \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(s\Omega) \cos \operatorname{am}(s\Omega)},$$

$$(kk')^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\epsilon} \frac{\sin \operatorname{am}(s\Omega)^2}{\cos \operatorname{am}(s\Omega) \Delta \operatorname{am}(s\Omega)},$$

die nach § 12 in der Form (2) darstellbar sind, von welchen die drei

(¹) Vgl. über diesen Satz: SCHERING und KRONECKER Monatsberichte der Berliner Akademie v. 22^{ten} Juni 1876, ferner den ganz elementaren Beweis von SCHERING in den Acta mathematica I. Der Satz selbst lautet: Sind h , n relative Primzahlen, die letztere ungerade, und ist μ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen

$$h, 2h, 3h, \dots, \frac{n-1}{2}h$$

deren absolut kleinster Rest (mod n) negativ ist, so ist

$$(-1)^{\mu} = \left(\frac{h}{n}\right).$$

ersten allgemein, die letzte falls n eine Quadratzahl ist (sonst deren Quadrat), Wurzeln von Transformationsgleichungen sind.

Nimmt man, was erlaubt ist, in

$$\Omega = \frac{4\mu\bar{K} + 4\mu' i K}{n}$$

μ, μ' nicht nur ohne gemeinschaftlichen Teiler mit n , sondern überhaupt relativ prim an, und ersetzt die elliptischen Functionen durch ihre Ausdrücke in den ϑ -Functionen, so kann man die Formeln (25) § 5 anwenden, und erhält für die vier Functionen (5) die Ausdrücke:

$$(6) \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} 2^{\frac{n-1}{2}} P_{00}^3, \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} 2^{\frac{n-1}{2}} P_{10}^3, \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} 2^{\frac{n-1}{2}} P_{01}^3, \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} P_{11}^3$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(7) \quad \tilde{\omega} = \frac{\mu + \mu' \omega}{n}$$

$$P_{00} \vartheta_{00}^{\frac{n-1}{2}} = e^{\frac{\pi i}{6} \mu' (n + \mu' \omega) \frac{n^2-1}{n}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^s \vartheta_{00}(2s\tilde{\omega})$$

$$P_{10} \vartheta_{10}^{\frac{n-1}{2}} = e^{\frac{\pi i}{6} \mu' (n + \mu' \omega) \frac{n^2-1}{n}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^s \vartheta_{10}(2s\tilde{\omega})$$

$$(8) \quad P_{01} \vartheta_{01}^{\frac{n-1}{2}} = e^{\frac{\pi i}{6} \mu' (n + \mu' \omega) \frac{n^2-1}{n}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^s \vartheta_{01}(2s\tilde{\omega})$$

$$P_{11} \vartheta_{11}^{\frac{n-1}{2}} = e^{\frac{\pi i}{6} \mu' (n + \mu' \omega) \frac{n^2-1}{n}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^s \vartheta_{11}(2s\tilde{\omega}),$$

woraus also zu schliessen, dass $P_{00}^3, P_{10}^3, P_{01}^3, P_{11}^3$, und, falls n ein Quadrat, auch P_{11}^3 Wurzeln von Transformationsgleichungen sind. Dasselbe folgt aber auch aus

$$(9) \quad \frac{P_{10}}{P_{00}} = \prod \frac{\cos \operatorname{am}(s\mathcal{Q})}{\Delta \operatorname{am}(s\mathcal{Q})}, \quad \frac{P_{01}}{P_{00}} = \prod \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(s\mathcal{Q})}$$

für diese beiden Quotienten, und aus

$$(10) \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} (\sqrt[3]{2})^{n-1} \frac{P_{11} P_{00}^3}{\sqrt[3]{kk'}^{\frac{n-1}{2}}} = \prod \frac{\sin \operatorname{am}(s\Omega) \Delta \operatorname{am}(s\Omega)}{\cos \operatorname{am}(s\Omega)}$$

für das Quadrat dieser letzteren Grösse, und falls n ein Quadrat ist, für diese selbst.

Nun ergibt sich aber noch aus der Multiplication, indem man in der letzten Formel IV § 9 $u = 2s\tilde{\omega}$ setzt und das Product über alle s von 1 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ nimmt:

$$(11) \quad P_{00}^{n^2} = \prod_{1, \frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Delta \operatorname{am}(s\Omega)^{n^2}}{D(\sin \operatorname{am} s\Omega^2)},$$

und hieraus schliesst man, dass auch $P_{00}^{n^2}$ Wurzel einer Transformationsgleichung ist. Dies lehrt nichts neues wenn n durch 3 teilbar ist; ist aber n nicht durch 3 teilbar, also $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ so folgt daraus unmittelbar durch Zusammenhalten mit dem vorigen Satz, und mit Rücksicht auf (9), (11), dass auch P_{00} , P_{10} , P_{01} , P_{11} und falls n ein Quadrat ist, auch P_{11} die Wurzeln von Transformationsgleichungen sind.

§ 16. Zweite Darstellung der Wurzeln der Transformationsgleichungen.

Die Wurzeln der eigentlichen Teilungsgleichung sind charakterisirt durch zwei nach dem Modul n bestimmte Zahlen μ , μ' , welche mit n keinen Teiler gemein haben, und die auch unter einander relativ prim vorausgesetzt werden können. Es kommt nun darauf an, die verschiedenen Reihen, die, wie wir oben gesehen haben, durch eine Gleichung $\varphi^{(n)}(n)^{\text{ten}}$ Grades bestimmt sind, durch Zahlen zu charakterisiren.

Aus der Definition der Reihen geht hervor, dass der grösste gemeinschaftliche Teiler d von μ' und n für alle Wurzeln einer Reihe derselbe ist. Sei also

$$(1) \quad \mu' = dy, \quad n = ad,$$

worin a und d als positiv vorausgesetzt sind, und den grössten gemeinschaftlichen Teiler e haben mögen, dessen Quadrat also in n aufgeht. Da nun y relativ prim zu a ist, so kann man die Zahlen c und x so bestimmen, dass

$$(2) \quad \mu = ax + cy,$$

worin c jedoch nur nach dem Modul a bestimmt ist, und z. B. durch eine beliebige Potenz von 2, oder, wenn a nicht durch 3 teilbar ist, durch eine beliebige Potenz von 3 teilbar angenommen werden kann. Aus der Bedingung (1) § 14 folgt nun, dass zwei Wurzeln der eigentlichen Teilungsgleichung dann und nur dann derselben Reihe angehören wenn in

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu &= ax + cy \\ \mu' &= dy \end{aligned}$$

die drei Zahlen a , d , c , letztere modulo a , denselben Wert haben. Da μ , μ' , n ohne gemeinsamen Teiler sind, so muss c relativ prim zu e sein und kann daher nur

$$\frac{a}{e} \varphi(e)$$

verschiedene Werte annehmen. Jeder dieser Zahlenwerte ist aber auch zulässig, und führt bei passender Bestimmung von x , y zu einem eine Reihe bestimmenden Zahlenpaar μ , μ' , woraus sich ergibt

$$\sum \frac{a}{e} \varphi(e) = \phi(n)^{(1)},$$

wenn die Summe sich auf alle Divisoren a von n erstreckt. In jeder Reihe gibt es wenigstens eine Wurzel, für welche $\mu \equiv d \pmod{n}$ ist, so dass $y = 1$ gesetzt werden kann. Wir wählen also als repräsentirendes Glied der Reihe ein solches aus, für welches

$$(4) \quad \begin{aligned} \mu &= ax + c \\ \mu' &= d, \end{aligned}$$

(¹) Diese Gleichung lässt sich leicht auch direct beweisen. (Vgl. DEDEKIND, *Modul-functionen*, I. c. S. 288.)

so dass μ, μ' relativ prim sind. Wenn wir nun zwei Zahlen ν, ν' so bestimmen, dass

$$(5) \quad \mu\nu' - \nu\mu' = 1$$

wird, so können wir nach § 5 die zusammengesetzte Transformation bilden

$$(6) \quad \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\nu', & 1 \\ -c\nu' + d\nu, & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu, & \mu' \\ \nu, & \nu' \end{pmatrix},$$

und die Anwendung der dortigen Formel (28) ergibt

$$(7) \quad P_{11} = i^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{12}(n\lambda + \lambda')} \sqrt{d} \frac{\eta\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}{\eta(\omega)}.$$

Behufs einfacherer Berechnung von $n\lambda + \lambda'$ kann man

$$\mu \equiv 0, \quad \nu' \equiv 0, \quad c \equiv 0 \pmod{8}$$

annehmen und erhält (§ 5)

$$n\lambda + \lambda' \equiv 2a\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) - a(d+1) \pmod{8}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} &\equiv ac \pmod{3}, & n &\equiv \pm 1 \pmod{3} \\ &\equiv -a\nu' - x \pmod{3}, & n &\equiv 0 \pmod{3}; \end{aligned}$$

die beiden letzteren Fälle lassen sich auch so zusammenfassen:

$$n\lambda + \lambda' \equiv (x + a\nu')(n^2 - 1) + ncd \pmod{3}.$$

Setzen wir also:

$$(9) \quad \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}[(x+a\nu')(n^2-1)+ncd]}$$

so folgt

$$(10) \quad P_{11} = \rho \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{d} \frac{\eta\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}{\eta(\omega)}$$

worin, falls n nicht durch 3 teilbar ist, $c \equiv 0 \pmod{24}$ angenommen werden kann, wodurch $\rho = 1$ wird. Ist n eine Quadratzahl, in welchem

Falle allein die Bestimmung des Vorzeichens in (10) von Interesse ist, so ist auch $d:e$ eine Quadratzahl und mithin ist

$$(11) \quad \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) = \left(\frac{ax+c}{d}\right) = \left(\frac{c}{e}\right).$$

Auf demselben Wege leitet man aus den drei letzten Formeln (1) § 4 die Gleichungen her:

$$(12) \quad \begin{aligned} \sqrt[3]{2}^{-n-1} \frac{P_{11} P_{00}^2}{\sqrt[3]{kk'}^{\frac{n-1}{2}}} &= i^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \sqrt{d} \frac{\vartheta_{00}\left(0, \frac{c+d\omega}{a}\right)}{\vartheta_{00}} \\ k^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[3]{2}^{-n-1} \frac{P_{11} P_{10}^2}{\sqrt[3]{kk'}^{\frac{n-1}{2}}} &= i^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \sqrt{d} \frac{\vartheta_{10}\left(0, \frac{c+d\omega}{a}\right)}{\vartheta_{10}} \\ k'^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[3]{2}^{-n-1} \frac{P_{11} P_{01}^2}{\sqrt[3]{kk'}^{\frac{n-1}{2}}} &= i^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \sqrt{d} \frac{\vartheta_{01}\left(0, \frac{c+d\omega}{a}\right)}{\vartheta_{01}}. \end{aligned}$$

Aus (10) und (12) ergibt sich aber:

$$(13) \quad \begin{aligned} \sqrt[3]{2}^{-n-1} P_{00}^2 &= \rho^2 \frac{\chi(\omega)^{2n}}{\chi\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^2} \\ \frac{P_{10}^2}{P_{00}^2} &= \frac{\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^2}{\varphi(\omega)^{2n}} \\ \frac{P_{01}^2}{P_{00}^2} &= \frac{\psi\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)^2}{\psi(\omega)^{2n}}. \end{aligned}$$

Aus diesen Ausdrücken kann auch die Wurzel gezogen werden, und durch Anwendung der HERMITE'schen Formeln für die lineare Transformation der Functionen φ , ψ , χ lassen sich die Vorzeichen bestimmen:

$$\sqrt[n]{2}^{\frac{n-1}{2}} P_{00} = \rho \frac{\chi(\omega)^n}{\chi\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)}$$

$$(14) \quad \frac{P_{10}}{P_{00}} = \left(\frac{2}{d}\right)^{\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)} \frac{\varphi(\omega)^n}{\varphi(\omega)^n}$$

$$\frac{P_{01}}{P_{00}} = \left(\frac{2}{d}\right)^{\psi\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)} \frac{\psi(\omega)^n}{\psi(\omega)^n}.^{(1)}$$

Aus (13) ergibt sich, dass auch die ν Functionen

$$(15) \quad j\left(\frac{c+d\omega}{a}\right).$$

(worin c an keine Congruenz gebunden zu werden braucht) Wurzeln einer Transformationsgleichung sind, die wir die *Invariantengleichung* nennen wollen.

Dass alle die hier betrachteten Transformationsgleichungen verschiedene Wurzeln haben und mithin irreductibel sind, ergibt sich sehr einfach aus dem Verhalten der Wurzeln für $q = 0$.

Die *Invariantengleichung* hat die Eigenschaft, dass ihre Coëfficienten alle ganze rationale Functionen von $j(\omega)$ sind. Denn ersetzt man ω durch $\omega + 1$ und $-1:\omega$, so geht $j(n\omega)$ über in $j(n\omega)$ und $j\left(\frac{\omega}{n}\right)$; und da auch letzteres eine Wurzel der (irreductibeln) Invariantengleichung ist, so können sich die Coëfficienten derselben durch diese beiden Substitutionen nicht ändern und sind daher (nach § 7) rationale Functionen von $j(\omega)$. Da ferner keine der Grössen (15) für einen endlichen Wert von $j(\omega)$ unendlich wird so sind sie auch ganze Functionen von j (wenn der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ ist).

Wir werden ausser der Invariantengleichung noch diejenigen Trans-

(¹) Die Transformationsgleichung für P_{00} ist zuerst von SCHLÄFLI untersucht (Journal für Mathematik, Bd. 72, S. 368).

Die Function $P_{10}:P_{00}$ führt auf die JACOBI'sche Modulargleichung. Die Bestimmung der Vorzeichen in diesen Formeln führen wir hier nicht weiter aus, da wir keinen Gebrauch von denselben machen werden.

formationsgleichungen betrachten, deren Wurzeln Potenzen von P_{11} sind. ¹⁾ Diese Gleichungen sind nicht alle nur von $j(\omega)$ abhängig, sondern zum Teil auch von g_2 und g_3 . Die Form dieser Abhängigkeit ergibt sich leicht aus den Sätzen des § 7. Wir heben hier nur diejenigen Fälle hervor, in welchen die Coefficienten rationale Functionen von j werden, die man ebenso wie oben findet, indem man ω in $\omega + 1$ und in $-1:\omega$ verwandelt. Nennen wir diese Art von Transformationsgleichungen *invariante Multiplicatorgleichungen*, so haben wir die folgenden Sätze.

Es sind Wurzeln von invarianten Multiplicatorgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 P_{11}^{n^2} & \text{für jedes ungerade } n \\
 P_{11}^{n^6} & n \equiv 1 \pmod{4} \\
 P_{11}^{n^4} & n \equiv 1 \pmod{6} \\
 (16) \quad P_{11}^{n^2} & n \equiv 1 \pmod{12} \\
 P_{11}^{n^3} & n \text{ eine ungerade Quadratzahl} \\
 P_{11} & n \text{ eine weder durch 2 noch durch 3 teilbare} \\
 & \text{Quadratzahl.}
 \end{array}$$

Da P_{11} für einen endlichen Wert von ω weder Null noch unendlich wird, so sind die Coefficienten der invarianten Multiplicatorgleichung ganze rationale Functionen von j und der letzte derselben ist von j unabhängig; oder mit andern Worten: es ist sowohl P_{11} als $1:P_{11}$ eine ganze algebraische Function von j . ⁽²⁾ Aus dem Schluss des § 14 geht hervor, dass die in (16) zusammengestellten Potenzen von P_{11} rational durch

$$j\left(\frac{c+d\omega}{a}\right)$$

ausgedrückt werden können, und zwar als ganze rationale Functionen, höchstens vom Grade $\nu - 1$. Die Coefficienten dieser Ausdrücke sind rationale Functionen von k^2 mit rationalen Zahlencoefficienten, und die

⁽¹⁾ Gleichungen dieser Art sind von F. KLEIN (l. c.) und KIEPERT (Journal für Mathematik, Bd. 87, 88, 95) untersucht.

⁽²⁾ Nach Analogie der Zahlentheorie würde eine solche algebraische Function als eine *Einheit* zu bezeichnen sein.

Veränderung von ω in $\omega + 1$ und $-\frac{1}{\omega}$ zeigt, dass dieselben rational von $j(\omega)$ abhängen. Dass auch in der Darstellung durch $j(\omega)$ nur *rationalen* Coefficienten vorkommen, ergibt sich leicht daraus, dass $j(\omega)$ nach aufsteigenden Potenzen von k^2 mit rationalen Coefficienten entwickelbar ist.

§ 17. Die Invariantengleichung.

Die Wurzeln der Invariantengleichung sind, wie wir oben gesehen haben, die Grössen

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right).$$

Da nun, wenn a, b, c, d vier beliebige ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, deren Determinante $ad - bc = n$ ist, eine Substitution

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ so bestimmt werden kann, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix},^{(1)}$$

so folgt, dass die sämtlichen Grössen

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$$

Wurzeln der Invariantengleichung sind, dass unter diesen aber nur ν von einander verschiedene sich finden.

Es sei nun

$$(I) \quad F_n(v, u)$$

diejenige ganze rationale Function der beiden Variablen u, v vom Grade

(¹) Vgl. DEDEKIND, *Modulfunctionen*, § 7, I. c.

$\phi(u) = v$ in Bezug auf v , in welcher die höchste Potenz v^r den Coefficienten (1) hat, welche für

$$(2) \quad u = j(\omega), \quad v = j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$$

verschwindet, und v_1, v_2, \dots, v_r seien die Wurzeln der Gleichung

$$(3) \quad F_n[v, j(\omega)] = 0.$$

Ist n' zu n relativ prim so ist $\phi(n)\phi(n') = \phi(nn')$ und das Product

$$(4) \quad F_{n'}(v, v_1)F_{n'}(v, v_2) \dots F_{n'}(v, v_r)$$

vom Grade $\phi(nn')$ hängt als symmetrische Function der Wurzeln von (3) rational von $j(\omega)$ ab. Zugleich verschwindet dieses Product für

$$v = j\left(\frac{\omega}{nn'}\right),$$

und daher ist dasselbe, wenn man wieder $j(\omega)$ durch u ersetzt, identisch mit

$$(5) \quad F_{nn'}(v, u)$$

(mit Rücksicht auf die Irreducibilität der letzteren Function). Hiernach kann man die Lösung der allgemeinen Gleichung $F_n(v, u) = 0$ auf den Fall zurückführen, wo n eine Primzahlpotenz ist.

Betrachten wir ferner die Gleichung

$$F_{p^{\pi-1}}(v, u) = 0$$

vom Grade $v = p^{\pi-2}(p+1)$, worin p eine Primzahl ist, deren Wurzeln v_1, v_2, \dots, v_r seien. Das Product

$$(6) \quad P = F_p(v, v_1)F_p(v, v_2) \dots F_p(v, v_r)$$

ist in Bezug auf v vom Grade $p^{\pi-2}(p+1)^2$ und verschwindet für

$$(7) \quad u = j(\omega), \quad v_1 = j\left(\frac{\omega}{p^{\frac{\pi-1}{2}}}\right), \quad v = j\left(\frac{\omega}{p^{\frac{\pi}{2}}}\right).$$

Es muss daher P durch $F_{p^{\frac{\pi}{2}}}(v, u)$ teilbar sein.

Ist ferner

$$(8) \quad u = j(\omega), \quad v = j\left(\frac{p^{\pi-2}c + \omega}{p^{\pi-1}}\right),$$

so verschwindet $F_p(v, v_1)$ auch für

$$(9) \quad v = j\left(\frac{\omega}{p^{\pi-2}}\right),$$

und da c in (8) p verschiedene Werte haben kann, so ist P teilbar durch

$$[F_{p^{\pi-2}}(v, u)]^p.$$

Die Vergleichung der Grade giebt alsdann

$$(10) \quad F_{p^{\pi}}(v, u) = \frac{F_p(v, v_1)F_p(v, v_2) \dots F_p(v, v_p)}{[F_{p^{\pi-2}}(v, u)]^p}.$$

Für $\pi = 2$ tritt an Stelle dieser Gleichung die folgende:

$$(10') \quad F_{p^2}(v, u) = \frac{F_p(v, v_1)F_p(v, v_2) \dots F_p(v, v_{p+1})}{(v - u)^{p+1}}.$$

Da die drei Functionen

$$(11) \quad j(2\omega), \quad j\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad j\left(\frac{1+\omega}{2}\right)$$

durch die beiden Substitutionen $\omega + 1$, $-1:\omega$ für ω nur in einander übergehen, so sind die symmetrischen Functionen dieser Grössen rationale Functionen von $j(\omega)$, woraus hervorgeht, dass auch für den Transformationsgrad 2 die Grössen (11) die Wurzeln einer Invariantengleichung sind. Die Formeln (10), (10') sind darnach auch auf den Fall $p = 2$ anwendbar, und es ergibt sich durch die obige Schlussweise, dass auch für ein gerades n eine Invariantengleichung $\phi(n)^{\text{ten}}$ Grades besteht, deren eine Wurzel $j(n\omega)$ ist. Da nun nach § 5 (27) jede Substitution mit der Determinante n

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

durch Vermittelung linearer Substitutionen aus

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & u \end{pmatrix}$$

abgeleitet werden kann, so folgt, dass die sämtlichen Functionen

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$$

derselben Gleichung genügen. Diese Functionen werden daher durch die $\phi(n)$ verschiedenen Functionen

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

erschöpft und zugleich folgt hieraus auch für diesen Fall die *Irreductibilität der Invariantengleichung*.

Die Function $F_n(v, u)$ ist symmetrisch in Bezug auf u und v . Denn aus der identischen Gleichung

$$F_n[j(n\omega), j(\omega)] = 0$$

folgt, indem man ω durch $\omega:n$ ersetzt:

$$F_n\left[j(\omega), j\left(\frac{\omega}{n}\right)\right] = 0,$$

und es ergibt sich also aus der Irreductibilität, dass $F_n(u, v)$ durch $F_n(v, u)$ teilbar sein muss. Da man die beiden unabhängigen Variablen vertauschen kann, so folgt dasselbe umgekehrt, und daraus ergibt sich

$$(12) \quad F_n(u, v) = \pm F_n(v, u).$$

Darin ist aber (ausser für $n = 1$) nur das obere Zeichen zulässig, da sonst $F_n(v, u)$ für $v = u$ verschwinden würde, was der Irreductibilität widerspricht.

Wir schliessen hier noch den Beweis eines wichtigen Satzes über die Zahlencoefficienten der Invariantengleichung an unter der Voraussetzung, dass der Transformationsgrad n eine Primzahl sei.

Die Invariante lässt sich nach ihrer Definition (§ 6) in eine nach

aufsteigenden Potenzen von q fortschreitende Reihe entwickeln von der Form

$$(13) \quad j(\omega) = q^{-2}(1 + a_1 q^2 + a_2 q^4 + \dots) = q^{-2} \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s},$$

worin die Coëfficienten a_s ganze Zahlen sind ($a_0 = 1$, $a_1 = 744$) und in eine ähnliche Reihe lässt sich jede Potenz von $j(\omega)$ entwickeln. Es ergibt sich ins Besondere durch Anwendung des polynomischen Lehrsatzes und des für jedes a gültigen FERMAT'schen Satzes

$$a^p \equiv a \pmod{p};$$

$$(14) \quad j(\omega)^p = q^{-2p} \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2sp} + pq^{-2(p-1)} \sum_{s=0}^{\infty} b_s q^{2s}$$

worin die b_s ebenfalls ganze Zahlen sind. Und aus (13) erhält man

$$(15) \quad j(p\omega) = q^{-2p} \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2sp}.$$

Setzt man also

$$j(\omega) = u, \quad j(p\omega) = v,$$

so folgt

$$(16) \quad u^p - v = pq^{-2(p-1)} \sum_{s=0}^{\infty} b_s q^{2s},$$

und wenn c_s andere ganze Zahlen sind:

$$(17) \quad (u - v^p)(u^p - v) = v^{p+1} + u^{p+1} - u^p v^p - uv = pq^{-2(p^2+p-1)} \sum_{s=0}^{\infty} c_s q^{2s}.$$

Es lässt sich aber nach (12) die Invariantengleichung in die Form setzen

$$(18) \quad (u - v^p)(u^p - v) = \sum_{r,s} c_{r,s} v^r u^s$$

worin die $c_{r,s}$ die zu bestimmenden Zahlencoëfficienten sind, welche der Bedingung

$$(19) \quad c_{r,s} = c_{s,r}, \quad c_{p,p} = 0$$

genügen (letzteres weil in der Entwicklung (17) die Potenz $q^{-2(p^2+p)}$ nicht vorkommt).

Zur Bestimmung der Coëfficienten $c_{r,s}$ kann man hiernach die Gleichungen (18) auch so schreiben:

$$(20) \quad (u - v^p)(u^p - v) = \sum_{0, p}^r \sum_{r-1}^s c_{r,s} (v^r u^s + v^s u^r) + \sum_{0, p-1}^s c_{s,s} u^s v^s.$$

Hierin setzt man nun die aus (13), (15) sich ergebenden Entwicklungen von $v^r u^s + v^s u^r$, $u^s v^s$ nach Potenzen von q ein, welche mit den Anfangsgliedern

$$q^{-2(rp+s)}, \quad q^{-2s(p+1)}$$

und mit dem Coëfficienten 1 beginnen. Auf der rechten Seite von (20) kommen aber nicht zwei Glieder mit demselben Anfang der Entwicklung vor, denn aus

$$rp + s = r'p' + s'$$

folgt $s \equiv s' \pmod{p}$ und mithin, da in (20) $s < p$ ist, $s = s'$, $r = r'$. Wenn man daher die Coëfficienten derselben Potenzen von q auf beiden Seiten der Gleichung (20) einander gleich setzt, so erhält man eine Reihe linearer Gleichungen, deren jede folgende nur *eine* neue Unbekannte $c_{r,s}$ mit dem Coëfficienten 1 enthält, so dass alle diese Coëfficienten sich als *ganze durch p teilbare Zahlen* ergeben.

Es hat also die Invariantengleichung die Form

$$(21) \quad (u - v^p)(u^p - v) = p \sum_{0, p}^{r,s} a_{r,s} v^r u^s$$

worin die $a_{r,s}$ den Bedingungen $a_{r,s} = a_{s,r}$; $a_{p,p} = 0$ genügende ganze Zahlen sind.

Hieraus ergibt sich noch mittelst der zu Anfang dieses Paragraphen gegebenen Darstellung der Invariantengleichung für einen zusammengesetzten Transformationsgrad ((4) und (10)), dass auch im allgemeinen Fall die Coëfficienten der Invariantengleichung *ganze Zahlen* sind.

IV. Abschnitt.

§ 18. Die complexe Multiplication.

Die Multiplicationstheorie der elliptischen Functionen haben wir in § 9 auf den Satz gegründet dass

$$(1) \quad \theta_{g,h}(\mu\omega, \omega)$$

für ein ganzzahliges μ θ -Functionen von μ und ω sind. Ähnliche Betrachtungen werden sich immer dann durchführen lassen, wenn μ und $\mu\omega$ Perioden der Function $\theta(u, \omega)$ sind. Damit dies aber stattfinde, ist notwendig und hinreichend, dass vier ganze Zahlen a, b, c, d sich so bestimmen lassen, dass

$$(2) \quad \begin{aligned} \mu &= a + b\omega \\ \mu\omega &= c + d\omega \end{aligned}$$

und dies ist, so lange ω variabel ist, nur möglich für $b = 0, c = 0$, also für ein ganzzahliges μ . Ausserdem aber können die Bedingungen (2) auch dann erfüllt werden, wenn ω einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen Coëfficienten und negativer Determinante genügt:

$$(3) \quad \omega(a + b\omega) = c + d\omega.$$

In diesem Fall wird μ eine complexe Zahl von der Form $M + N\sqrt{-n}$, worin n eine ganze positive, M, N rationale Zahlen sind, deren letzte nicht verschwindet. Diese Art der Multiplication heisst aus diesem Grunde die *complexe Multiplication*. Die Werte welche in diesem Falle der Modul k oder die Invariante $j(\omega)$ annehmen, sind *algebraische Zahlen*, welche mit den quadratischen Formen von negativer Determinante im innigsten Zusammenhang stehen. Die Existenz solcher *singulärer Moduln* ist zuerst von ABEL erkannt, der auch bereits den Satz ausgesprochen hat, dass dieselben durch Wurzelziehen aus dem Gebiete der rationalen Zahlen abgeleitet werden können (ABEL, Oeuvres, éd. SYLOW I, S. 377 u. folg., 426).

Die vollständige Theorie der singulären Moduln ist sodann von KRONCKER in einer längeren Reihe ausgezeichnete Untersuchungen begründet worden, die in den Monatsberichten der Berliner Akademie¹⁾ veröffentlicht sind. Auch die Untersuchungen von DEDKIND über die elliptischen Modulfunctionen zielen auf eine Anwendung auf die complexe Multiplication, welche durch die Einführung der Valenz die sich von der absoluten Invariante $i(\omega)$ nur durch einen rationalen Zahlenfactor unterscheidet) eine sehr elegante Gestalt annimmt. Im Folgenden soll eine Anwendung der Transformationstheorie der elliptischen Functionen auf die Ableitung einiger Sätze aus der Theorie der complexen Multiplication gemacht werden, wobei nur der *elementare* Teil der Theorie der quadratischen Formen vorausgesetzt werden soll, während andere Sätze aus dieser Theorie, die von GAUSS und DIRICHLET durch tiefer liegende Hilfsmittel bewiesen sind, aus der complexen Multiplication selbst hergeleitet werden sollen.

Aus den am Eingang dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen (Formel 3) ergibt sich, dass diejenigen Werte von ω , für welche die complexe Multiplication statt hat, imaginäre Wurzeln von Gleichungen zweiten Grades mit rationalen Coefficienten sind, und zwar diejenigen, deren imaginärer Teil positiv ist.

Auch das Umgekehrte ist der Fall, denn es sei

$$(4) \quad A\omega^2 + B\omega + C = 0$$

eine solche Gleichung, in welcher A, B, C ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und

$$(5) \quad 4AC - B^2 = \Delta$$

sei positiv; so kann man hieraus in mannigfaltiger Weise Gleichungen von der Form (3) herleiten, indem man setzt

$$(6) \quad b = Ax, \quad a - d = Bx, \quad c = -Cx, \quad a + d = y.$$

Hieraus folgt

$$(7) \quad 2a = y + Bx, \quad b = Ax, \quad c = -Cx, \quad 2d = y - Bx,$$

¹⁾ 29 Oct. 1857, 26 Juni 1862, 22 Januar 1863, 1 Dec. 1870, 19 Juli 1875, 16 Apr. 1877, 2 Febr. 1880, 7 Dec. 1882.

und man kann über die ganzen Zahlen x, y so verfügen, dass a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Es ist dann

$$(8) \quad 4(ad - bc) = 4n = y^2 + \Delta x^2,$$

und x, y können keinen andern gemeinsamen Teiler haben als 2. Setzt man umgekehrt für x, y irgend zwei der Bedingung (8) genügende Zahlen *ohne gemeinschaftlichen Teiler*, so erhält man aus (7) vier Zahlen a, b, c, d mit der Determinante $-n$, welche keinen Teiler gemein haben. Dasselbe gilt auch noch für ein ungerades n , wenn x, y den grössten gemeinsamen Teiler 2 haben.

Unter diesen Voraussetzungen ist aber

$$(9) \quad j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = j(\omega).$$

und es genügt daher dieser Wert von j der Gleichung

$$(10) \quad F_n(u, u) = 0.$$

Wenn umgekehrt $u = j(\omega)$ eine Wurzel der Gleichung (10) ist, so folgt daraus nach § 16 eine Gleichung von der Form (9), woraus wieder die Gleichungen (7) und (8) folgen. (Vgl. § 6.)

Der quadratischen Gleichung (4) entspricht eine primitive quadratische Form erster oder zweiter Art, je nachdem B gerade oder ungerade, also $\Delta \equiv 0$ oder $\equiv -1 \pmod{4}$ ist:

$$(11) \quad \left(A, \frac{1}{2}B, C\right) \quad \text{oder} \quad (2A, B, 2C)$$

von der Determinante $-\frac{1}{4}\Delta$ oder $-\Delta$; und umgekehrt entspricht jeder primitiven quadratischen Form von *negativer Determinante* eine Gleichung von der Form (4), also ein Wert von ω und von $j(\omega)$, für welchen complexe Multiplication stattfindet.

Ersetzt man eine Form (11) durch eine äquivalente Form, so geht auch ω in eine äquivalente Zahl über, und $j(\omega)$ bleibt ungeändert. Ein solcher singulärer Wert von $j(\omega)$ entspricht also nicht nur einer Form, sondern einer ganzen Formenklasse. *Dagegen entsprechen nicht äquivalenten Formen immer verschiedene Werte von $j(\omega)$.*

Wir können daher passend die Zahl $j(\omega)$ als *Invariante der durch* (11) *repräsentirten Formenclasse* oder kurz als *Classeninvariante* bezeichnen.

Die Classeninvarianten sind *ganze algebraische Zahlen*. Als Wurzeln von Gleichungen (10) sind sie zunächst algebraische Zahlen. Der Grad der Gleichung (10) wird bestimmt aus

$$(12) \quad F_n[j(\omega), j(\omega)] = \prod [j(\omega) - j(\frac{c + d\omega}{a})],$$

indem man ω unendlich, $q = 0$ werden lässt. (Vgl. § 16.) Es ergibt sich hieraus leicht für den Grad μ von $F_n(u, n)$ falls n kein Quadrat ist

$$(13) \quad \mu = 2 \sum_{d|n} \frac{d}{n} \varphi(d).$$

und falls n ein Quadrat ist

$$(14) \quad \mu = 2 \sum_{d|n} \frac{d}{n} \varphi(d) + \varphi(\sqrt{n}).$$

Der Coëfficient der höchsten Potenz von u in $F_n(u, n)$ wird durch dasselbe Verfahren bestimmt, und ergibt sich, wenn n kein Quadrat ist, $= \pm 1$. Da man nun über x, y in (8) stets so verfügen kann, dass n kein Quadrat wird,⁽¹⁾ und da, wie früher bewiesen, die Coëfficienten in $F_n(v, u)$ ganze Zahlen sind, so folgt dass die Classeninvarianten *ganze algebraische Zahlen* sind. (DEDEKIND, Suppl. XI zur dritten Auflage von DIRICHLET's Vorlesungen über Zahlentheorie, § 160 ff.)

Wir bezeichnen nun das Product

$$\Pi[u - j(\omega)].$$

ausgedehnt über alle zu einer bestimmten negativen Determinante $-n$ gehörigen Invarianten eigentlich primitiver Classen mit

$$H_n(u),$$

(¹) Ist z. B. $x^2 + \Delta y^2 = n^2$ ein Quadrat und p eine in n aber nicht in x und folglich auch nicht in y aufgehende Primzahl und ξ relativ prim zu p , so ist $(x + \xi p)^2 + \Delta y^2$ durch p , aber nicht durch p^2 theilbar und also gewiss kein Quadrat, und man kann über ξ noch so verfügen, dass $x + \xi p$ und y relativ prim sind.

und dasselbe Product, erstreckt über alle zur Determinante $-n$ gehörigen Invarianten uneigentlich primitiver Classen mit

$$H'_n(u).$$

(H'_n existirt natürlich nur dann wenn $n \equiv -1 \pmod{4}$). H_n, H'_n sind ganze rationale Functionen der unbestimmten Grösse u , deren Grade h, h' gleich den Classenzahlen der Formen erster und zweiter Art von der Determinante $-n$ sind. Der Hauptsatz, dessen Nachweis zu führen ist, besteht darin, dass die Functionen H_n, H'_n rationale Coëfficienten haben, woraus schon von selbst folgt, dass diese Coëfficienten, als ganze algebraische Zahlen, auch ganze rationale Zahlen sind.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass der Satz richtig ist für H_1 und H_3 ; denn für diese beiden Fälle hat man beziehungsweise

$$(15) \quad \omega = -\frac{1}{\omega} \quad \text{und} \quad \omega = -1 - \frac{1}{\omega},$$

und folglich (nach § 6 (15), (16)) $g_3(\omega) = 0$ resp. $g_2(\omega) = 0$; also ist

$$(16) \quad H_1(u) = u - 27.64, \quad H_3(u) = u.$$

Wir nehmen nun an, es sei unser Satz als richtig erwiesen für H_m so lange $m < n$, und für H'_m so lange $m < 4n - 1$, und zeigen dass er auch gilt für H_n und H'_{4n-1} .

Wenn die Gleichung (10) $F_n(u, u) = 0$ irgend eine Classeninvariante zur Wurzel hat, so genügen derselben, wie die Gleichungen (7), (8) zeigen alle zu derselben Determinante und derselben Art gehörigen Classeninvarianten. Die Gleichung (8) ist aber erfüllt für

$$(17) \quad \begin{aligned} \Delta &= 4n, & y &= 0, & x &= +1 \\ \Delta &= 4n-1, & y &= 1, & x &= +1, \end{aligned}$$

und alle andern Werte von Δ , für welche (8) noch befriedigt werden kann, sind kleiner als diese. Es ist daher $F_n(u, u)$ teilbar durch $H_n(u)$, $H'_{4n-1}(u)$ und ausserdem nur noch durch solche Functionen $H_m(u)$, $H'_m(u)$, deren Indices kleiner sind als n , resp. $4n - 1$, und die daher nach Voraussetzung rationale Coëfficienten haben.

Daraus folgt also, dass das Product

$$(18) \quad H_n(u) H'_{4n-1}(u)$$

rationale Coëfficienten hat. (Man erhält nämlich dies Product, indem man $F_n(u, u)$ von mehrfachen Factoren und von solchen Teilern befreit, die es mit niedrigeren Functionen $H_m(u)$, $H'_m(u)$ gemein hat.)

Es ist nun ferner

$$4(4n-1) = y^2 + (4n-1)x^2$$

lösbar ($y = 0$, $x = \pm 2$),

$$4(4n-1) = y^2 + 4nx^2$$

nicht lösbar. (Denn aus letzterer Gleichung würde folgen $4n(4-x^2) = y^2 + 4$. Es könnte also wegen der positiven rechten Seite x nur $= \pm 1$ sein; dies ist aber nicht möglich, weil $y^2 + 4$ nicht durch 3 teilbar sein kann.) Hieraus folgt, dass

$$F_{4n-1}(u, u)$$

durch $H_{4n-1}(u)$ teilbar, dagegen zu $H_n(u)$ relativ prim ist. Und daraus ergibt sich, dass auch $H_n(u)$ und $H'_{4n-1}(u)$ rationale Coëfficienten haben. Die Gleichungen $H_m(u) = 0$, $H'_m(u) = 0$ wollen wir die zur Determinante $-m$ gehörige *Classengleichung erster und zweiter Art* nennen.

§ 19. Über die Beziehungen zwischen den Classeninvarianten der verschiedenen Ordnungen.

A) *Classeninvarianten erster und zweiter Art.*

Es seien

$$(1) \quad H_m(u) = 0, \quad (2) \quad H'_m(u) = 0$$

die zur Determinante $-m$ (welche $\equiv 1 \pmod{4}$) vorausgesetzt ist) gehörigen Classengleichungen erster und zweiter Art und $u = j(\omega)$ eine Wurzel der ersteren. Dann ist

$$(3) \quad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0, \quad B^2 - AC = -m \equiv 1 \pmod{4},$$

und man kann B und C ungerade voraussetzen, was zur Folge hat, dass A durch 4 teilbar ist. Die cubische Invariantengleichung

$$(4) \quad P_3(v, u) = 0$$

hat zu Wurzeln

$$(5) \quad v = j(2\omega), \quad j\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad j\left(\frac{1+\omega}{2}\right),$$

und wenn

$$(6) \quad \omega' = 2\omega, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{1+\omega}{2}$$

gesetzt wird, so hat man respective:

$$\omega' = 2\omega, \quad \frac{1}{4}A\omega'^2 + B\omega' + C = 0, \quad \text{Det: } B^2 - AC = -m, \text{ zweite Art}$$

$$(7) \quad \omega' = \frac{1}{2}\omega, \quad 4A\omega'^2 + 4B\omega' + C = 0, \quad \text{Det: } 4(B^2 - AC) = -4m$$

$$\omega' = \frac{1+\omega}{2}, \quad 4A\omega'^2 + 4(B-A)\omega' + (A-2B+C) = 0.$$

$$\text{Det: } 4(B^2 - AC) = -4m$$

Es ist also nur die erste der drei Grössen (5) zugleich Wurzel der Gleichung (2), und dieselbe kann daher *rational* durch $j(\omega)$ ausgedrückt werden. Es sei dieser Ausdruck

$$(8) \quad v = R(u).$$

Ersetzt man hierin u durch die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1), so ergeben sich daraus die sämmtlichen Wurzeln $v = j(\omega')$ der Gleichung (2). Denn ist $v = j(\omega')$ eine beliebige Classeninvariante zweiter Art und

$$(9) \quad A\omega'^2 + B\omega' + C = 0, \quad B^2 - 4AC = -m \equiv 1 \pmod{4}$$

und sind wieder B, C als ungerade vorausgesetzt, so ist $j\left(\frac{1}{2}\omega'\right)$ eine zur

Determinante: — m gehörige Classeninvariante erster Art, weil $\omega = \omega':2$ der Gleichung genügt:

$$4A\omega^2 + 2B\omega + C = 0.$$

Es fragt sich nun, ob unter den so erhaltenen Werten von v derselbe mehrmals vorkommen kann.

Um dies zu entscheiden, bemerken wir, dass die Werte von u , welche nach (8) denselben Wert von v hervorbringen, sämtlich der Gleichung (1) und der Gleichung (4) genügen müssen, und dass daher höchstens je drei dieser Werte einander gleich sein können.

Ist nun $j(\omega')$ irgend einer der Werte v , in welchem ω' einer Gleichung (9) genügt, so sind die drei Wurzeln der Gleichung (4)

$$(10) \quad u = j(2\omega'), \quad j\left(\frac{\omega'}{2}\right), \quad j\left(\frac{\omega' + 1}{2}\right).$$

und man hat nach (9) die Gleichungen:

$$\omega = 2\omega', \quad 4A\omega^2 + 2B\omega + 4C = 0$$

$$(11) \quad \omega = \frac{1}{2}\omega', \quad 4A\omega^2 + 2B\omega + C = 0$$

$$\omega = \frac{1 + \omega'}{2}, \quad 4A\omega^2 + 2(B - 2A)\omega + (A - B + C) = 0,$$

welche alle die Determinante — m haben. Wenn nun

$$(12) \quad -m \equiv 1 \pmod{8},$$

so ist A gerade, und unter den drei den Gleichungen (11) entsprechenden quadratischen Formen

$$(13) \quad (A, B, 4C), \quad (4A, B, C), \quad (4A, B - 2A, A - B + C)$$

ist nur die mittlere eigentlich primitiv. Daher genügt von den drei Grössen (10) nur die mittlere der Gleichung (1) und die Grössen (8) sind alle unter einander verschieden. Daher ist in diesem Falle

$$(14) \quad h' = h.$$

Wenn aber

$$(15) \quad m \equiv 5 \pmod{8},$$

so ist A ungerade, und die quadratischen Formen (13) sind alle drei eigentlich primitiv. Wenn daher die drei Grössen (10) von einander verschieden sind, so ergeben je drei der Grössen u nach (8) denselben Wert von v , und es folgt:

$$(16) \quad h' = \frac{1}{3} h.$$

Es handelt sich also nur noch um die Frage, ob unter den drei Grössen (10) gleiche vorkommen, oder ob zwei der Zahlen

$$(17) \quad 2\omega', \quad \frac{1}{2}\omega', \quad \frac{1+\omega}{2}$$

äquivalent sein können. Nehmen wir etwa an, es sei

$$2\omega' = \frac{2\gamma + \partial\omega'}{2\alpha + \gamma\omega'}, \quad \alpha\partial - \gamma\gamma' = 1,$$

so folgt wegen (9)

$$2\beta = Ax, \quad -2\gamma = Cx, \quad 4\alpha - \partial = Bx, \quad 4\alpha + \partial = y$$

$$16 = y^2 + mx^2,$$

worin x und y gerade sind. Dies ist aber nur möglich wenn $m = 3$ ist, was in der That eine Ausnahme bildet, da in diesem Falle

$$(18) \quad h = h' = 1.$$

In diesem Falle sind die drei Grössen (17) äquivalent, und zu demselben Resultat kommt man, wenn man von der Annahme der Äquivalenz zweier anderer unter den Zahlen (17) ausgeht.

Da sich bei dieser Untersuchung ergeben hat, dass die Classen-invarianten der zweiten Art rational durch die der ersten Art ausdrückbar sind, so werden wir uns in der Folge auf die Betrachtung der Classen-invarianten und Classengleichungen erster Art beschränken, auch ohne dies immer ausdrücklich hervorzuheben.

B) Es sei p eine beliebige (gerade oder ungerade) Primzahl und

$$(1) \quad m = p^2 m',$$

$$(2) \quad H_m(u) = 0; \quad (3) \quad H_{m'}(v) = 0$$

die zu den Determinanten $-m$, $-m'$ gehörigen Classengleichungen erster Art. Es sei $u = j(\omega)$ eine beliebige Wurzel der ersteren und

$$(4) \quad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0, \quad AC - B^2 = m = p^2 m'$$

und A durch p nicht teilbar angenommen, was stets zulässig ist. Die Invariantengleichung

$$(5) \quad F_p(u, v) = 0$$

hat zu Wurzeln

$$(6) \quad v = j(p\omega), \quad j\left(\frac{\omega + c}{p}\right). \quad (c \equiv 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

Setzt man nun

$$\omega' = p\omega, \quad \frac{\omega + c}{p},$$

so genügt ω' beziehungsweise den Gleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} A\omega'^2 + 2Bp\omega' + Cp^2 &= 0 \\ Ap^2\omega'^2 + 2(B - Ac)p\omega' + (Ac^2 - 2Bc + C) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben die Determinante $-p^2m$ und sind alle primitiv, ausser wenn $Ac^2 - 2Bc + C$ durch p teilbar ist. Dies findet aber nur für einen einzigen Wert von c statt, den man aus der Congruenz

$$Ac - B \equiv 0 \pmod{p}$$

erhält: denn es ist

$$A(Ac^2 - 2Bc + C) = (Ac - B)^2 + m,$$

und es ist für diesen $Ac^2 - 2Bc + C$ durch p^2 teilbar. Dieser eine Wert von ω' genügt daher der Gleichung

$$(8) \quad A\omega'^2 + 2 \frac{B - Ac}{p} \omega' + \frac{Ac^2 - 2Bc + C}{p^2} = 0,$$

deren Determinante $-m'$ ist. Daraus ergibt sich also, dass die beiden Gleichungen (3) und (5) *eine und nur eine Wurzel gemeinschaftlich haben, welche sich rational durch u ausdrücken lässt*:

$$(9) \quad v = R(u).$$

Ist zweitens $v = j(\omega')$ eine beliebige Wurzel der Gleichung (3) und

$$(10) \quad A\omega'^2 + 2B\omega' + C = 0, \quad AC - B^2 = m',$$

und A wieder theilbar durch p , so genügt $\omega = p\omega'$ der Gleichung

$$(11) \quad A\omega^2 + 2Bp\omega + Cp^2 = 0,$$

welche primitiv ist und zur Determinante $-m = -p^2m'$ gehört. Es ist also $j(\omega)$ eine Wurzel von (2), aus welcher man nach (9) $j(\omega')$ erhält. Daraus ergibt sich also, dass durch (9) *alle* Wurzeln der Gleichung (3) dargestellt werden, wenn man für u *alle* Wurzeln der Gleichung (1) setzt. Man hat nun genau wie oben zu untersuchen, wie viele unter den Ausdrücken (9) denselben Wert v ergeben. Die verschiedenen Werte von u , welche dies leisten, müssen zugleich den beiden Gleichungen (2) und (5) genügen. Die Werte von u aber, welche für $v = j(\omega')$ der Gleichung (5) genügen sind

$$(12) \quad j(p\omega'), \quad j\left(\frac{\omega' + c}{p}\right),$$

und wenn man

$$(13) \quad \omega = p\omega', \quad \frac{\omega' + c}{p}$$

setzt, so gelten für diese Werte von ω beziehlich die Gleichungen

$$(14) \quad \begin{aligned} A\omega^2 + 2Bp\omega + Cp^2 &= 0 \\ Ap^2\omega'^2 + 2(B - Ac)p\omega' + (Ac^2 - 2Bc + C) &= 0, \end{aligned}$$

welche sämmtlich die Determinante $-m$ haben. Unter den Grössen (12) werden also diejenigen der Gleichung (2) genügen, für welche die entsprechende Gleichung (14) primitiv ist. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn p in m' aufgeht, so kommt unter den Gleichungen (14) nur eine nicht primitive vor, nämlich diejenige, für welche

$$Ac - B \equiv 0 \pmod{p}.$$

b) Wenn $-m'$ quadratischer Rest von p ist, so sind zwei der Gleichungen (14) nicht primitiv, nämlich diejenigen für welche

$$Ac - B \equiv \pm \sqrt{-m'} \pmod{p}.$$

c) Wenn $-m'$ Nichtrest von p ist, so sind sämtliche Gleichungen (14) primitiv.

d) Für $p = 2$ sind die beiden aus der Congruenz

$$Ac - B \equiv \pm \sqrt{-m'} \pmod{2}$$

gefolgerten Werte von c mit einander identisch und folglich ist für $p = 2$ immer eine unter den Gleichungen (14) nicht primitiv.

Nehmen wir also vorläufig an, was wir gleich weiter untersuchen werden, dass unter den Grössen (13) nicht zwei äquivalente sind, so erhalten wir, wenn wir mit h, h' die Grade der Gleichungen (2), (3) bezeichnen, das folgende Resultat

$$\begin{aligned} h &= ph' && \text{falls } m' \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oder } p = 2 \\ (15) \quad h &= (p-1)h' && \gg \left(\frac{-m'}{p}\right) = +1 \\ h &= (p+1)h' && \gg \left(\frac{-m'}{p}\right) = -1. \end{aligned}$$

Es handelt sich also noch darum, ob unter den Grössen (13) nach Ausschluss der wegen a), b) oder d) wegfällenden zwei äquivalente vorkommen können.

α) Sei also zunächst

$$\frac{\omega' + c}{p} = \frac{\gamma + \partial p \omega'}{a + \beta p \omega'}, \quad \alpha \omega - \beta \gamma = 1$$

$$\beta p \omega'^2 + (\alpha + \beta p c - \partial p^2) \omega' + \alpha c - \gamma p = 0,$$

so muss wegen (10)

$$(16) \quad \beta p = Ax, \quad \alpha + \beta p c - \partial p^2 = 2Bx, \quad \alpha c - \gamma p = Cx$$

sein, und wenn man also

$$\alpha - \beta p c + \delta p^2 = 2y$$

setzt, so folgt

$$(17) \quad y^2 + m'x^2 = p^2.$$

Hierin ist aber wegen (16) x und folglich auch y durch p teilbar, und (17) kann *nur* für $m' = 1$ befriedigt werden (da x nicht $= 0$ sein kann). Ist aber $m' = 1$, so ist $y = 0$, $x = \pm p$

$$\alpha = \pm pB, \quad \beta = \pm A, \quad \gamma = \pm Bc \mp C, \quad \delta p = \mp B \pm Ac,$$

und es sind also für $m' = 1$, $p\omega'$ und $(\omega' + c):p$ äquivalent, wenn c aus der Congruenz $Ac - B \equiv 0 \pmod{p}$ bestimmt wird (gilt auch für $p = 2$).

β) Es seien sodann

$$\frac{\omega' + c}{p}, \quad \frac{\omega' + c'}{p}$$

äquivalent, also

$$\frac{\omega' + c}{p} - \frac{\gamma p + \delta(\omega' + c')}{\alpha p + \beta(\omega' + c')},$$

woraus wie oben folgt:

$$\beta = Ax, \quad \alpha p c + \beta c c' - \gamma p^2 - \delta p c' = Cx$$

$$(18) \quad \alpha p + \beta c + \beta c' - \delta p = 2Bx$$

$$\alpha p - \beta c + \beta c' + \delta p = 2y$$

$$(19) \quad y^2 + m'x^2 = p^2.$$

Aus (18) ergibt sich

$$(20) \quad Cx \equiv \beta c c', \quad Ax \equiv \beta, \quad 2Bx \equiv \beta(c + c') \pmod{p}.$$

Ist nun x nicht durch p teilbar, so folgt hieraus

$$C \equiv A c c'$$

$$(21) \quad 2B \equiv A(c + c') \pmod{p}.$$

$$A^2(c - c')^2 \equiv -4m'$$

Die letztere Congruenz ist aber nur dann möglich, wenn entweder m' durch p teilbar, und dann ist $c = c'$, oder wenn $-m'$ quadratischer Rest von p ist, und dann ist

$$Ac - B \equiv \sqrt{-m'}, \quad Ac' - B \equiv -\sqrt{-m'} \pmod{p}.$$

Diese beiden Werte von c sind aber in Folge von b) von dem System (12) oder (13) ohnehin auszuschliessen. Für $p = 2$ ergibt sich ohne Weiteres nach der zweiten Congruenz (21) $c \equiv c' \pmod{2}$.

Es bleibt also nur übrig, dass in (18), (19), (20) x durch p teilbar sei und folglich nach (19) $m' = 1$, $y = 0$, $x = \pm p$. Dann folgt aber

$$\alpha = \pm (B - Ac'), \quad \gamma p = \mp (Acc' - Bc - Bc' + C)$$

$$\beta = \pm pA, \quad \delta = \mp (B - Ac).$$

Es ergibt sich also aus der Congruenz

$$(22) \quad Acc' - Bc - Bc' + C \equiv 0 \pmod{p}$$

zu jedem c ein c' (und umgekehrt), ausser wenn $Ac - B \equiv 0 \pmod{p}$ (in welchem Falle die Congruenz (22) unmöglich ist). Dieser Fall ist aber bereits unter α) erledigt. Die beiden nach (22) bestimmten Werte von c , c' sind nur dann einander gleich, wenn

$$(Ac - B)^2 \equiv -m' \pmod{p},$$

was aber nach b) ausgeschlossen ist. Das Ergebniss dieser Betrachtung ist also, dass unter den Grössen (13) (nach Ausschluss der wegen a), b), d) auszuschliessenden) nur dann äquivalente vorkommen, wenn $m' = 1$ ist, und dass in diesem Falle *je zwei* derselben äquivalent sind. Die Formeln (15) sind also richtig, ausser für $m' = 1$, und in diesem Falle treten an deren Stelle die folgenden:

$$(23) \quad \begin{array}{ll} h = h' & \text{für} \quad p = 2 \\ h = \frac{p-1}{2} h' & \left(\frac{-1}{p}\right) = +1 \\ h = \frac{p+1}{2} h' & \left(\frac{-1}{p}\right) = -1. \end{array}$$

Hierdurch sind für den Fall negativer Determinanten die Verhältnisse der Classenzahlen abgeleitet für solche Determinanten, die in quadratischem Verhältniss stehen. (Vgl. DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorl. über Zahlentheorie*, § 100.)

§ 20. *Hilfssätze aus der Theorie der algebraischen Functionen.*

Behufs einer weiteren Anwendung auf die complexe Multiplication schalte ich hier die Beweise einiger einfacher algebraischer Lehrsätze ein, wobei ich mich bezüglich der Terminologie und allgemeinen Voraussetzungen auf die ersten Paragraphen der von DEDEKIND und mir gemeinsam verfassten *Theorie der algebraischen Functionen* (Journal für Mathematik, Bd. 92, S. 181) berufen kann, ohne jedoch aus jener Theorie selbst etwas vorauszusetzen.

1°. Es sei v eine *ganze algebraische Function* von u , definiert durch die irreductible Gleichung

$$(1) \quad F(v, u) = v^\nu + a_1 v^{\nu-1} + a_2 v^{\nu-2} + \dots + a_\nu = 0$$

in welcher die a_1, a_2, \dots, a_ν *ganze rationale Functionen* von u sind. Jede *ganze Function* M des durch (1) bestimmten Körpers algebraischer Functionen ist dann in der Form darstellbar

$$(2) \quad M = \frac{\phi(v, u)}{F'(v)}$$

worin ϕ eine *ganze rationale Function* von v und u ist. Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich aus Folgendem. Beziehen wir das Zeichen Σ auf die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (1), so ist nach bekannten Sätzen

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum \frac{v^k}{F'(v)} &= 0, & (0 \leq k \leq \nu-2) & \qquad \sum \frac{v^{\nu-1}}{F'(v)} = 1 \\ \sum \frac{v^\nu}{F'(v)} &= -a_1, & \sum \frac{v^{\nu+1}}{F'(v)} &= a_1^2 - a_2, \dots \end{aligned}$$

und allgemein, wenn $k \geq \nu$

$$\sum \frac{v^k}{F'(v)}$$

eine ganze rationale Function von u .

Nun kann man immer, wenn $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ (ganze oder gebrochene) rationale Functionen von u bedeuten

$$(4) \quad M = \frac{\alpha_0 v^{\nu-1} + \alpha_1 v^{\nu-2} + \dots + \alpha_{\nu-1}}{F'(v)}$$

setzen und aus (3) erhält man zur Bestimmung der $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}$

$$(5) \quad \sum M = \alpha_0, \quad \sum vM = -\alpha_0 a_1 + \alpha_1, \quad \sum v^2 M = \alpha_0(a_1^2 - a_2) - \alpha_1 a_1 + \alpha_2, \dots$$

Da nun die $\sum M, \sum vM, \sum v^2 M, \dots$ als ganze algebraische und zugleich rationale Functionen von u auch *ganze rationale* Functionen von u sind, so folgt dasselbe für die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ w. z. b. w.

Auf Grund dieses Satzes kann man also auch setzen

$$(6) \quad M = \frac{\phi_1}{F'(v)}, \quad M^2 = \frac{\phi_2}{F''(v)}, \quad M^3 = \frac{\phi_3}{F'''(v)}, \dots$$

worin die $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ ganze rationale Functionen von u und v sind.
2°. Es sei die Function (1) in zwei Factoren zerlegt

$$(7) \quad F(v, u) = F_1(v)F_2(v)$$

$$(8) \quad \begin{aligned} F_1(v) &= (v - v_1)(v - v_2) \dots (v - v_\lambda) = v^\lambda + \alpha_1 v^{\lambda-1} + \dots + \alpha_\lambda \\ F_2(v) &= (v - v_{\lambda+1})(v - v_{\lambda+2}) \dots (v - v_\nu) = v^{\nu-\lambda} + \beta_1 v^{\nu-\lambda-1} + \dots + \beta_{\nu-\lambda}. \end{aligned}$$

Auf Grund von (6) kann man dann, wenn v einen der Werte $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$ hat, setzen:

$$M = \frac{\phi_1}{F'_1(v)F_2(v)}, \quad M^2 = \frac{\phi_2}{F'_1(v)F_2(v)}, \quad M^3 = \frac{\phi_3}{F'_1(v)F_2(v)}, \dots$$

Setz man nun

$$F_2(v_1)F_2(v_2) \dots F_2(v_\lambda) = P,$$

so ist P zunächst eine ganze rationale Function der α_i, β_i ; und da (durch Ausführung der Division $P:F_1$) die β_i ganz und rational durch die α_i und u bestimmbar sind, so kann P auch als *ganze rationale* Function der α_i und u , also auch als *ganze rationale* Function von $u, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda$ dargestellt werden. Ebenso schliesst man, dass das Product

$$P_1 = F_2(v_2) \dots F_\lambda(v_\lambda)$$

als symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{F_1(v)}{v - v_1} = 0$$

ganz und rational durch v_1, α_i, u ausgedrückt werden kann. Wenn also $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \dots$ ganze rationale Functionen von $u, v, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda$ bedeuten, so hat man für $v = v_1, v_2, \dots, v_\lambda$

$$(9) \quad M = \frac{\varphi_1(v)}{PF'_1(v)}, \quad M^2 = \frac{\varphi_2(v)}{PF'_1(v)}, \quad M^3 = \frac{\varphi_3(v)}{PF'_1(v)}, \dots$$

Die Functionen φ können mittelst der Gleichung $F'_1 = 0$ in die Form gesetzt werden

$$(10) \quad \varphi_k = c_0^{(k)} v^{\lambda-1} + c_1^{(k)} v^{\lambda-2} + \dots + c_{\lambda-1}^{(k)},$$

worin die $c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \dots, c_{\lambda-1}^{(k)}$ ganze rationale Functionen von $u, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\lambda$ sind. Aus (9) und (10) erhält man aber (mit Rücksicht auf (3)) die über $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$ erstreckten Summen:

$$(11) \quad \sum M = \frac{c_0^{(1)}}{P}, \quad \sum M^2 = \frac{c_0^{(2)}}{P}, \quad \sum M^3 = \frac{c_0^{(3)}}{P}, \dots,$$

und es genügen daher die Werte $M_1, M_2, \dots, M_\lambda$ einer Gleichung λ^{ten} Grades

$$(12) \quad \gamma_0 M^\lambda + \gamma_1 M^{\lambda-1} + \dots + \gamma_{\lambda-1} M + \gamma_\lambda = 0,$$

in welcher die Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\lambda$ *ganze rationale* Functionen von $u, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda$ sind, und γ_0 eine Potenz von P . Die Zahlencoefficienten in allen hier vorkommenden Functionen sind *rationale Zahlen*, wenn sie es in der ursprünglich gegebenen Gleichung (1) sind.

Wenn nun für einen speciellen Wert u_0 von u die λ Werte $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$ einander gleich, $= v_0$ werden, während $v_{\lambda+1}, v_{\lambda+2}, \dots, v_\nu$ von v_0 verschieden sind, so wird P und folglich γ_0 für $u = u_0$ nicht verschwinden, und die zu $v = v_1, v_2, \dots, v_\lambda$ gehörigen Werte der ganzen Function M , (die gleich oder verschieden sein können) werden durch eine Gleichung λ^{ten} Grades bestimmt, deren Coëfficienten rationale Functionen von u_0, v_0 sind. Ist ins Besondere $v_0 = u_0$, so sind die Coëfficienten dieser Gleichung rationale Functionen von u_0 .

§ 21. Zerfällung der Classengleichung in Factoren.

Wir beschliessen diese Betrachtungen mit dem Beweise des schönen von KRONFCKER entdeckten Satzes, dass die Classengleichung $H_m(u)$ nach Adjunction der Quadratwurzeln aus den in m aufgehenden Primzahlen in Factoren zerlegt werden kann, deren jeder die zu einem Geschlecht gehörigen Classeninvarianten zu Wurzeln hat. Es wird sich daraus zugleich ein neuer Beweis des zahlentheoretischen Satzes ergeben, dass in jedem der möglichen Geschlechter eine gleich grosse Anzahl von Classen enthalten ist.

1°. Es sei n eine ungerade Quadratzahl > 1 , und

$$(1) \quad E'_n(v, u) = 0$$

die zu n gehörige Invariantengleichung. Die Wurzeln derselben sind, wenn $u = j(\omega)$ gesetzt wird

$$(2) \quad v = j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$$

(auch wenn ω variabel ist), $ad = n$, und c möge $\equiv 0 \pmod{8}$ angenommen werden.

Nach der Schlussbetrachtung der § 16 können die Functionen

$$(3) \quad M = \left(\frac{c}{e}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{d^3} \left(\frac{\eta\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)}{\eta(\omega)} \right)^3$$

rational durch u, v ausgedrückt werden, und zwar mit rationalen Zahlencoëfficienten.

2°. Wir wollen nun in (1) für u eine zur Determinante $-m$ gehörige Classeninvariante, d. h. irgend eine Wurzel der Classengleichung

$$(4) \quad H_m(u) = 0$$

setzen, also ω einer Gleichung unterwerfen

$$(5) \quad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0, \quad AC - B^2 = m,$$

und wollen darin, was stets erlaubt ist, A positiv und relativ prim zu $2m$ und zu n voraussetzen. Es ist zu untersuchen, welche von den Werten (2) gleich u werden. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sich so bestimmen lassen, dass

$$(6) \quad \frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die Vergleichung von (5) und (6) liefert aber, wenn x, y ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, deren erste positiv genommen werden kann, (da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleichzeitig mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden können, ohne dass (6) sich ändert)

$$(7) \quad \begin{aligned} d\beta &= Ax, & c\beta - a\delta &= Bx + y \\ d\alpha &= Bx - y, & c\alpha - a\gamma &= Cx, \end{aligned}$$

und daraus

$$(8) \quad n = y^2 + mx^2.$$

Aus unserer Annahme über A folgt aber

$$(9) \quad d = 1, \quad a = n,$$

und so können für jedes der Gleichung (8) genügende Wertpaar x, y (ohne gemeinsamen Teiler) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und c , und zwar letzteres eindeutig nach dem Modul n , durch die Gleichungen (7) bestimmt werden.

Es lässt sich auch leicht einsehen, dass zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (8) nicht zu demselben c führen können; denn durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c$ sind nach (7) die beiden Zahlen x, y völlig bestimmt, x als

der grösste gemeinschaftliche Teiler von β , $\alpha + c\beta - n\delta$, $c\alpha - n\gamma$, und die Annahme einer Gleichung

$$\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} = \frac{\gamma' + \delta'\omega}{\alpha' + \beta'\omega}$$

führt, wenn der interesselose Fall $m = 1$ ausgeschlossen wird, zu $\alpha = \pm \alpha'$, $\beta = \pm \beta'$, $\gamma = \pm \gamma'$, $\delta = \pm \delta'$.

Die Anzahl der Werte v , die nach dieser Annahme $= u$ werden, ist also ebenso gross wie die Anzahl der eigentlichen Lösungen der Gleichung (8), wobei x positiv angenommen werden kann, y aber, wenn es nicht verschwindet, mit beiden Zeichen genommen werden muss.

3°. Die Werte von M , welche zu den gleich u werdenden Wurzeln v gehören, sind nach § 20 Wurzeln einer Gleichung

$$(10) \quad \phi(M, u) = 0,$$

welche rational von u und rationalen Zahlen abhängt, deren Grad (in Bezug auf M) gleich der Anzahl der eigentlichen Lösungen der Gleichung (8) ist. Diese Werte von M können aber in Folge der Gleichung (6) nach § 5 (6) leicht bestimmt werden, und es ergibt sich, wenn λ die dort (§ 5 (16)) angegebene Bedeutung hat, nach (3), (5), (7)

$$(11) \quad M = e^{\frac{\pi i(\lambda-3)}{4}} (\sqrt{ix\sqrt{m}-y})^3,$$

worin die Quadratwurzel mit positivem reellem Teil zu nehmen ist. (In diesem Ausdruck ist von der speciellen Wahl der Classeninvariante u nur die Zahl λ abhängig.)

Es ist nun von Wichtigkeit, zu entscheiden, ob unter den Werten (11) solche sind, welche dieselbe 8^{te} Potenz haben. Dazu wäre erforderlich, dass für zwei verschiedene Paare $x, y; x', y'$ von Lösungen der Gleichung (8)

$$(ix\sqrt{m}-y)^{12} = (ix'\sqrt{m}-y')^{12}$$

oder, wenn ρ eine zwölfte Einheitswurzel bedeutet

$$(12) \quad yy' + xx'm - i\sqrt{m}(xy' - yx') = \rho n.$$

Ist nun

a) $\rho = \pm 1$, so folgt hieraus sofort

$$x = x', \quad y = y', \quad \rho = 1$$

b) $\rho = \pm i \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right)$ erweist sich sofort als unmöglich, da in (12) der reelle Teil auf der rechten Seite irrational, auf der linken rational wäre.

c) $\rho = \pm \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{m}(yx' - xy') = \pm \frac{1}{2}n\sqrt{3}$, was unmöglich ist, da n ungerade vorausgesetzt war; es bleibt also noch

d) $\rho = \pm i$; $xx'm + yy' = 0$, $\sqrt{m}(yx' - xy') = \pm n$.

Dies ist also nur dann möglich, wenn m ein Quadrat und \sqrt{m} in n enthalten ist. Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber noch durch Quadriren, mit Benutzung der Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2m + y^2 &= n, & x'^2m + y'^2 &= n, & xx'm + yy' &= 0: \\ n &= m(x^2 + x'^2), \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass n auch durch m teilbar sein muss, und

$$y = \pm x' \sqrt{m}, \quad y' = \mp x \sqrt{m}, \quad x^2 + x'^2 = \frac{n}{m}.$$

Unter dieser Voraussetzung wird aber in Folge vom (7):

$$\begin{aligned} (Ac - B)x &\equiv y \\ (Ac' - B)x' &\equiv y' \end{aligned} \pmod{n},$$

woraus, wenn k, k' ganze Zahlen bedeuten

$$Ac - B = k\sqrt{m}, \quad Ac' - B = k'\sqrt{m}$$

$$k - k' \equiv 0 \pmod{8A}$$

$$kx \equiv \pm x', \quad k'x' \equiv \mp x \pmod{\frac{n}{\sqrt{m}}}$$

$$(k - k')xx' \equiv \pm \frac{n}{m} \equiv 0 \pmod{\frac{n}{\sqrt{m}}}$$

und da x, x' relativ prim zu n sein müssen, so folgt

$$k \equiv k' \pmod{8A \frac{n}{\sqrt{m}}}.$$

Hiernach ist nun

$$\frac{c + \omega}{n} = \frac{Ac - B + i\sqrt{m}}{An} = \frac{k + i}{A \frac{n}{\sqrt{m}}}$$

$$\frac{c' + \omega}{n} = \frac{Ac' - B + i\sqrt{m}}{An} = \frac{k' + i}{A \frac{n}{\sqrt{m}}}$$

und folglich ist $M = M'$.

Hieraus ergibt sich also, dass für keinen der Gleichung (4) genügenden Wert von u zwei der vier Functionen

$$\phi(M, u), \quad \phi(-M, u), \quad \phi(iM, u), \quad \phi(-iM, u)$$

zugleich verschwinden können.

4°. Wir zerlegen nun die als gegeben vorausgesetzte Zahl m in zwei Factoren

$$(13) \quad m = m'm'',$$

so dass m'' ungerade und durch kein Quadrat teilbar ist und setzen

$$(14) \quad x = 4, \quad y = 4m' - m''$$

$$(15) \quad \sqrt{ix\sqrt{m}} - y = 2i\sqrt{m'} + \sqrt{m''}$$

$$(16) \quad n = mx^2 + y^2 = (4m' + m'')^2,$$

und haben unter dieser Voraussetzung λ in der Formel (11) zu bestimmen (wobei zur Vereinfachung B gerade angenommen werden kann). Eine einfache Rechnung ergibt

$$(17) \quad M = -\left(\frac{A}{m'}\right)\left(i^{\frac{m''+1}{2}} 2\sqrt{m'} + i^{\frac{m''-1}{2}} \sqrt{m''}\right)^3.$$

Setzt man den so gefundenen Wert von M in $\phi(\pm M, u)$ ein, so muss für jede Wurzel der Gleichung $H_m(u) = 0$

$$\phi(M, u) = 0 \quad \text{oder} \quad \phi(-M, u) = 0$$

sein. Für keinen dieser Werte von u können aber diese beiden Gleichungen zugleich bestehen (nach 3°). Sucht man also den grössten gemeinschaftlichen Teiler $\Psi(M, u)$ von $H_m(u)$ und $\Phi(M, u)$, so ist dieser relativ prim zu $\Psi(-M, u)$.

Ist nun m' kein Quadrat und $m'' > 1$, so sind $\sqrt{m'}$, $\sqrt{m''}$ beide irrational und M ändert (nach (17)) sein Zeichen, wenn $\sqrt{m'}$, $\sqrt{m''}$, gleichzeitig die entgegengesetzten Werte erhalten. Da nun $H_m(u)$ rationale Coefficienten hat, so ist es nicht nur durch $\Psi(M, u)$, sondern auch durch $\Psi(-M, u)$, und also auch durch das Product beider teilbar. Da überdies für jede Wurzel von $H_m(u) = 0$ eine der beiden Functionen $\Psi(\pm M, u)$ verschwinden muss, so ist

$$(18) \quad H_m(u) = \Psi(M, u) \Psi(-M, u)$$

und es folgt, dass unter den sämtlichen zur Determinante $-m$ gehörigen eigentlich primitiven Formenclassen jeder der beiden Characteres

$$(19) \quad \left(\frac{A}{m''} \right) = \pm 1$$

gleich oft vorkommt.

Ist m' ein Quadrat, also nach der Voraussetzung über m'' die grösste in m aufgehende Quadratzahl, und $m \equiv m'' \equiv 3 \pmod{4}$ so ist

$$(20) \quad i^{\frac{m''+1}{2}} \sqrt{m'}$$

rational, und dieser Schluss ist nicht mehr anwendbar. In der That ist in diesem Falle für alle Formen der Determinante $-m$

$$(21) \quad \left(\frac{A}{m''} \right) = \left(\frac{A}{m} \right) = \left(\frac{-m}{A} \right) = 1.$$

In diesem Falle sind alle Characteres in der Form

$$(22) \quad \left(\frac{A}{m''} \right)$$

enthalten, und die Zerlegung (18) genügt, um alle Geschlechter zu trennen.

Die Factorenzerfallung (18) gilt für jede Zerlegung von m in zwei Factoren m' , m'' , wenn

$$m \equiv 1 \pmod{4}, \quad m \equiv 2, 6 \pmod{8}, \quad m \equiv 4 \pmod{16}$$

weil im ersten und letzten dieser Fälle, auch wenn m' ein Quadrat ist, die Grösse (20) irrational ist, und in den beiden andern m' überhaupt kein Quadrat sein kann.

Da in diesen vier Fällen resp. die Charactere

$$(-1)^{\frac{1}{2}(A-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(A-1) + \frac{1}{8}(A^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{8}(A^2-1)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(A-1)}$$

sich aus den Characteren von der Form (22) zusammensetzen lassen, so genügt die Zerfällung (18) zur vollständigen Trennung aller Geschlechter. Dagegen reicht für die Fälle $m \equiv 12 \pmod{16}$, $m \equiv 0 \pmod{8}$ die Formel (17) nicht aus, um alle Geschlechter von einander zu trennen.

Man leitet daher auf dem gleichen Wege aus der Annahme

$$(23) \quad \begin{aligned} x &= 2, & y &= m' - m'', & m' &\equiv 0 \pmod{4} \\ n &= (m' + m'')^2, & \sqrt{2i\sqrt{m} - y} &= i\sqrt{m'} + \sqrt{m''} \end{aligned}$$

die Formel her:

$$(24) \quad M = (-1)^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{2}{m''}\right) \left(\frac{A}{m''}\right) (-1)^{\frac{A-1}{2}} \left(i^{\frac{m''-1}{2}} \sqrt{m'} + i^{\frac{m'+1}{2}} \sqrt{m''}\right)^2$$

welche für den Fall $m \equiv 12 \pmod{16}$ dasselbe leistet, wie die Formel (17) in der übrigen Fällen (wobei auch die Annahme $m'' = 1$ zu berücksichtigen ist).

Ist endlich $m \equiv 0 \pmod{8}$, so setze man, indem man unter S^2 die grösste in m aufgehende Quadratzahl versteht

$$m = S^2 P.$$

Ist dann $P \equiv 2$ oder $\equiv 6 \pmod{8}$ so ist stets

$$(-1)^{\frac{A-1}{2} + \frac{A^2-1}{8}} \left(\frac{A}{P}\right) = 1, \quad (-1)^{\frac{A^2-1}{8}} \left(\frac{A}{P}\right) = 1$$

und mit Hilfe dieser Relationen können alle Charactere auf eine der beiden Formen

$$\left(\frac{A}{m''}\right), \quad (-1)^{\frac{A-1}{2}} \left(\frac{A}{m''}\right)$$

zurückgeführt werden. Da m' in diesen Fällen niemals ein Quadrat ist, so genügen die Formeln (17), (24) zur vollständigen Trennung der Ge-

schlechter und gestatten die früheren Schlüsse. Um aber für den Fall $m \equiv 0 \pmod{8}$ eine stets ausreichende Formel zu erhalten, nehme man

$$(25) \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{4}m' - m'', \quad n = \left(\frac{1}{4}m' + m''\right)^2$$

$$\sqrt{ix\sqrt{m} - y} = \frac{1}{2}i\sqrt{m'} + \sqrt{m''},$$

woraus sich ergibt

$$(26) \quad M = (-1)^{\frac{m}{8}} e^{-\frac{\pi i}{4} m'' A} \left(\frac{A}{m''}\right) \left(i^{\frac{m'+1}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{m'} + i^{\frac{m''-1}{2}} \sqrt{m''}\right)^3.$$

Nachdem die Zerlegung nach den Characteren $\left(\frac{A}{m''}\right)$ mittelst der Formel (17) erledigt ist, handelt es sich nur noch um die Unterscheidung der dargestellten Zahlen A nach dem Modul 8. Dazu genügt es, in (26) $m'' = 1$, $m' = m$ zu setzen, wodurch sie in den vier Fällen die folgende Form annimmt:

$$(27) \quad \begin{aligned} M &= (-1)^{\frac{m}{8}} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{m} + 1\right)^3, & A \equiv 1 \pmod{8} \\ M &= (-1)^{\frac{m}{8}} \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{m} + 1\right)^3 = M', & A \equiv 3 \pmod{8} \\ M &= (-1)^{\frac{m}{8}} \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{m} + 1\right)^3 = M'', & A \equiv 5 \pmod{8} \\ M &= (-1)^{\frac{m}{8}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{m} + 1\right)^3 = M''', & A \equiv 7 \pmod{8}. \end{aligned}$$

Die vier Werte von M gehen in einander über durch die Vertauschungen

$$(28) \quad \begin{aligned} M, & \quad \sqrt{2}, \quad i, \quad \sqrt{m} \\ M', & \quad -\sqrt{2}, \quad -i, \quad -\sqrt{m} \\ M'', & \quad -\sqrt{2}, \quad i, \quad \sqrt{m} \\ M''', & \quad \sqrt{2}, \quad -i, \quad -\sqrt{m}. \end{aligned}$$

Ist nun $\Psi(M, u)$ wie oben der grösste gemeinschaftliche Theiler von $H_m(u)$ und $\Phi(M, u)$, so folgt aus 3° dass die vier Functionen $\Psi(M, u)$,

$\Psi(M', u)$, $\Psi(M'', u)$, $\Psi(M''', u)$ zu einander relativ prim sind, und wenn die Vertauschungen (28) zulässig sind, so schliesst man wie oben

$$(29) \quad H_m(u) = \Psi(M, u) \Psi(M', u) \Psi(M'', u) \Psi(M''', u),$$

woraus also folgt, dass jeder der vier Fälle

$$A \equiv 1, \quad A \equiv 3, \quad A \equiv 5, \quad A \equiv 7 \pmod{8}$$

in gleich vielen Formenklassen der Determinante $-m$ vorkommt.

Die Vertauschungen (28) sind aber nur dann nicht alle zulässig, wenn m ein Quadrat oder das doppelte eines Quadrats ist. Im ersten Fall ist nur die Vertauschung (M, M') , im zweiten die (M, M') zulässig, und in diesen Fällen kommen auch in der That nur die Characterere vor

$$A \equiv 1, 5 \quad \text{resp.} \quad A \equiv 1, 3 \pmod{8},$$

und zwar wieder jeder derselben in gleich vielen Classen.

Da die Invarianten zweier entgegengesetzter Classen conjugirt imaginär, die der ambigen Classen reell sind, und da ferner zwei entgegengesetzte Classen zu demselben Geschlecht gehören, so haben alle die hier gefundenen Teilgleichungen reelle oder conjugirt imaginäre Wurzeln und folglich muss $\sqrt{-1}$ aus den Coëfficienten derselben sich fortheben.

QA

Acta mathematica

1

A2575

v.6

Math.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
